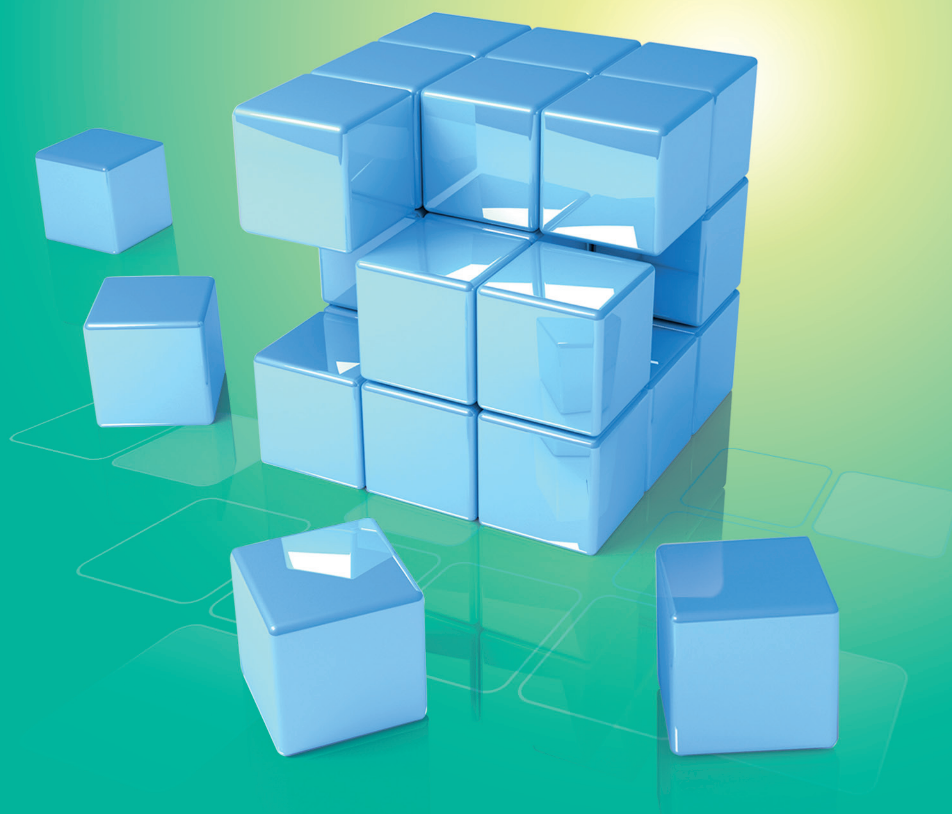
Álgebra

Actividades

Cuarto grado de Secundaria



Intelectum EVOLUCIÓN

Editorial San Marcos



Álgebra
Libro de actividades
Cuarto grado de Secundaria
Colección Intelectum Evolución

RUC 20545774519
Jr. Dávalos Lissón 135, Cercado de Lima
Teléfonos: 331-1535 / 331-0968 / 332-3664
Fax: 330 - 2405
E-mail: ventas_escolar@edicioneslexicom.com
www.editorialsanmarcos.com

Responsable de edición:
Yisela Rojas Tacuri

Equipo de redacción y corrección:
Josué Dueñas Leyva / Christian Yovera López
Marcos Pianto Aguilar / Julio Julca Vega
Óscar Díaz Huamán / Kristian Huamán Ramos
Saby Camacho Martinez / Eder Gamarra Tiburcio
Jhonatan Peceros Tinco

Diseño de portada:
Miguel Mendoza Cruzado / Cristian Cabezudo Vicente

Retoque fotográfico:
Luis Armestar Miranda

Composición de interiores:
Lourdes Zambrano Ibarra / Natalia Mogollón Mayurí
Roger Urbano Lima

Gráficos e Ilustraciones:
Juan Manuel Oblitas / Ivan Mendoza Cruzado

Primera edición 2013
Tiraje: 15 000

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú
N.º 2013-12002
ISBN: 978-612-313-058-9
Registro de Proyecto Editorial N.º 31501001300690

Impreso en Perú / *Printed in Peru*

Pedidos:
Av. Garcilaso de la Vega 978 - Lima.
Teléfonos 331-1535 / 331-0968 / 332-3664
E-mail: ventas_escolar@edicioneslexicom.com

Impresión:
Editorial San Marcos, de Aníbal Jesús Paredes Galván
Av. Las Lomas 1600, Urb. Mangomarca, Lima, S.J.L.
RUC 10090984344

La Colección Intelectum Evolución para Secundaria ha sido concebida a partir de los lineamientos pedagógicos establecidos en el Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular, además se alinea a los patrones y estándares de calidad aprobados en la Resolución Ministerial N.º 0304-2012-ED.

La divulgación de la Colección Intelectum Evolución se adecúa a lo dispuesto en la Ley 29694, modificada por la Ley N.º 29839, norma que protege a los usuarios de prácticas ilícitas en la adquisición de material escolar.

El docente y el padre de familia orientarán al estudiante en el debido uso de la obra.

Contenido



Unidad 1



Álgebra

RECUERDA

Métodos integrales

Al comienzo, estos métodos se elaboraban, acumulaban e independizaban en el transcurso de la resolución de problemas sobre el cálculo de volúmenes, áreas, centros de gravedad… formándose como métodos de integración definida. El primero de los métodos publicado fue el de las operaciones directas con infinitesimales actuales. Apareció en el año 1615 en las obras de Kepler. Para la demostración matemática de las leyes de Kepler fue necesario utilizar las magnitudes infinitesimales. Sin embargo, fue en su obra Nueva esteriometría de toneles de vino… donde expuso su método de utilización de magnitudes infinitesimales y los fundamentos para la suma de estos.

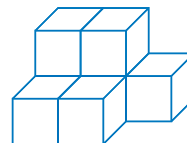
La mayor fama la adquirió la geometría de los indivisibles, creada por Cavalieri, pensado como un método universal de la geometría. Este método fue creado para la determinación de las medidas de las figuras planas y cuerpos, los cuales se representaban como elementos compuestos de elementos de dimensión menor. Así, las figuras constan de segmentos de rectas paralelas y los cuerpos de planos paralelos. Sin embargo, este método era incapaz de medir longitudes de curvas, ya que los correspondientes indivisibles (los puntos) eran adimensionales. Pese a ello, la integración definida en forma de cuadraturas geométricas, adquirió fama en la primera mitad del siglo XVII, debido a la gran cantidad de problemas que podían resolver. Las ideas que incluyen elementos de integración definida abarcan hacia los años 60 del siglo XVII amplias clases de funciones algebraicas y trigonométricas. Era necesario solo un impulso, la consideración total de los métodos desde un punto de vista único, para cambiar radicalmente toda la problemática de integración y crear el cálculo integral.

Reflexiona

- *La voluntad humana es asombrosa. Una y otra vez se ha impuesto sobre adversidades increíbles.*
- *El poder se adquiere aprendiendo a usar ese gran don en las decisiones que tomamos día tras día.*
- *La integridad es el valor que nos asignamos a nosotros mismos. Es nuestra capacidad para comprometernos a mantener los compromisos con nosotros mismos, de "hacer lo que decimos".*

¡Razona...!

En la figura, el sólido que está formado por 7 cubos iguales pegados entre sí se sumerge completamente en un recipiente con pintura. Luego de secar y despegar, ¿cuántas caras pintadas hay más que las no pintadas?



A) 13 B) 16 C) 14 D) 29 E) 10



Aplicamos lo aprendido



TEMA 1: TEORÍA DE EXPONENTES

1 Reduce:

$$R = \frac{2^{x+5} \cdot 2^{x+8}}{2^{2x+12}}$$

A) 1 B) 2 C) 4
D) 8 E) 32

2 Efectúa:

$$A = \frac{5^{3x+15}}{5^{2x+10} \cdot 5^{x+3}}$$

A) 25 B) 5 C) 125
D) 1 E) $\sqrt{5}$

3 Si: $A = 5^{4-x} \cdot 5^{x-2}$; $B = 5^{3x-1} \cdot 5^{2-3x}$;

halla: $\frac{A}{B}$

A) 5 B) 35 C) 25
D) 125 E) 1

4 Efectúa:

$$S = 20.5^{-1} + 16.2^{-2} + 32.4^{-1}$$

A) 11 B) 10 C) 9
D) 16 E) 8

5 Simplifica:

$$M = \frac{2^{n+1} \cdot 4^{-2n+1} + 8^{-n+2}}{16 \cdot (2^n)^{-3}}$$

A) 4,5 B) 3,5 C) 2,5
D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

6 Efectúa:

$$M = ab^2a^2b^3a^3b^4a^4b^5a^5b^6$$

A) $a^{14}b^{19}$ B) $a^{15}b^{21}$ C) $a^{15}b^{20}$
D) $a^{13}b^{20}$ E) $a^{12}b^{21}$

7 Si $x^{a+b} = ax^{-a}$, calcula: $x^{b}\left(x^{x^{2a}}\right)^{2x^{b}}$

A) 0 B) 1 C) a
D) a^2 E) –a

8 Si: $x^y = \frac{1}{2}$

$y^x = -3$

halla el valor de: $E = x^{y^{x+1}} + y^{x^{1-y}}$

A) –1 B) 1 C) 15
D) 17 E) 10

9 Efectúa:

$E = (5^4)^{10} + (7^2)^{10} - (5^8)^5 - (7^5)^4$

A) 2 B) 1 C) 343
D) 81 E) 0

10 Calcula:

$A = (2^3)^4 - (2^6)^2 + (3^2)^2 - 9^2 + 5^0$

A) 0 B) 1 C) 16
D) 15 E) 18

11 Calcula:

$A = (7^4)^{20} - (7^{16})^5 + 9^2 + (-3)^4 + 1$

A) 780 B) 163 C) 81
D) 27 E) 36

12 Calcula:

$A = \sqrt[3]{\dfrac{2^7 + 2^5}{2^4 + 2^2}}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

13 Si: $ab = 1$

halla: $M = \sqrt{\dfrac{a^{5/2}.b^{10/3}}{\sqrt{a}\,.\sqrt[3]{b^4}}}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

14 Simplifica:

$\sqrt{\dfrac{4^2.3^2 + 8^2.6^2}{15^3 + 2.15^2}}$

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{5}{6}$
D) $\frac{6}{7}$ E) $\frac{7}{8}$



Claves

1. B 2. A 3. A 4. D 5. A 6. C 7. C 8. D 9. E 10. B 11. B 12. B 13. A 14. B



Practiquemos

NIVEL 1

Comunicación matemática

La maestra de matemática deja como tarea los siguientes ejercicios para: Eminorie, Daysi y Karina, respectivamente:

1. Reduce:

$$E = \frac{6(2^{x-1}) + 5(2^{x+2}) - 2^{x+4}}{2^{x+5} - 2(2^{x+3}) - 15(2^x)}$$

2. Halla el valor numérico de:

$$D(x; y) = x\left(\frac{y+1}{x+1}\right) + y\left(\frac{x+1}{y+1}\right)$$

Para: $x = 16^{4^{-2^{-1}}}$; $y = 2^{-2}$

3. Si: $x^x = 2$

Calcula: $K = \dfrac{(x^3)^x}{(x^2)^x}$

El proceso de solución de las alumnas es como sigue:

i) Para Eminorie:

Tomamos como factor común: 2^x

$$E = \frac{2^x(6.2^{\square} + 5.2^{\square} - 2^{\square})}{2^x(2^{\square} - 2.2^{\square} - 15)}$$

$$E = \frac{\square + \square - \square}{\square - \square - 15} = \frac{\square}{\square}$$

$\therefore E = 7$

ii) Para Daysi:

$$x = 16^{4^{-\frac{1}{2}}} = 16^{\frac{\square}{\square}} = 16^{\square} = \square$$

$$y = 2^{-2} = \frac{1}{\square^{\square}} = \frac{\square}{\square}$$

$$\Rightarrow xy = \square . \square = \square$$

Luego:

$$D(x; y) = \frac{\square + x}{x+1} + \frac{\square + y}{y+1}$$

$$= \frac{\square}{1+x} + \frac{\square}{y+1}$$

$$= \square + \square \quad \therefore D(x, y) = \square$$

iii) Para Karina:

$$K = \frac{(x^3)^x}{(x^2)^x} = \frac{(\square)^3}{(\square)^2}$$

Reemplazamos: $x^x = 2$

$$K = \frac{\square^{\square}}{\square^{\square}} = \square \qquad \therefore K = \square$$

iv) Se observa que:

La respuesta de mayor valor la obtuvo la alumna: $\square$

Hay 2 resultados iguales y estas corresponden a las alumnas:

$\square$ y $\square$

El resultado de Eminorie más el doble del resultado de Daysi y más el triple del resultado de Karina es: $\square$

Razonamiento y demostración

4. Indica el valor aproximado de:

$$E = \sqrt[3]{\frac{16}{\sqrt[3]{\frac{16}{\sqrt[3]{\frac{16}{\vdots}}}}}}$$

A) –2 B) 5 C) 4
D) 1 E) 2

5. Halla: 2M + N

Si: $M = 64^{-2^{-1}}$ y $N = 27^{-3^{-1}}$

A) $\frac{5}{12}$ B) $\frac{7}{12}$ C) $\frac{6}{13}$
D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{1}{2}$

6. Efectúa:

$$K = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} + \frac{14}{9}\right]^{5^0}$$

A) 0 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

7. Efectúa:

$R = x^3y^2x^4y^3x^2y^2xy^3$

A) x^9y^{10} B) $x^{10}y^9$ C) $x^{11}y^{10}$
D) $x^{10}y^{11}$ E) $(xy)^{10}$

8. Si: $a^a = 3$

Calcula: $E = \dfrac{(a^5)^a}{(a^4)^a}$

A) 9 B) 27 C) 8
D) 3 E) 1

Resolución de problemas

9. De la expresión:

$$E = \frac{n^{-2}}{n^{-4}}\left(\frac{n^{-4}}{n^{-2}}\right)^a$$

determina el valor de **a** tal que: $E = n^{-198}$

A) 98 B) 99 C) 100
D) 101 E) 102

10. Efectúa:

$$M = \sqrt[x]{1 + x^{1+x}\sqrt{x}} \, . \, \sqrt[1+x^{1+x}]{x^{x^x}}$$

A) x^2 B) $\sqrt[x]{x}$ C) x^x
D) x^3 E) $\frac{1}{x^x}$

NIVEL 2

Comunicación matemática

Determina la tabla de verdad:

11. $x^5y^{-1} . x^4y^{-2} . x^3y^{-3} . x^2y^{-4} = x^{13}y^{-10}$ $\square$

12. $\left(\frac{1}{25} + \left(\frac{5}{2}\right)^{-2}\right)^{-1} = 5$ $\square$

13. $3^{2^{2^{7^{0^{9^{2}}}}}} = 82$ $\square$

Razonamiento y demostración

14. Simplifica:

$$\frac{21^x}{3^{x+2} - 3^{x+1} + 3^x}$$

A) 7 B) 7^{-x} C) 7^{x+1}
D) 7^{x-1} E) 7^x

15. Calcula: $L = 5^{2^{3^{0^{4^{5^{6}}}}}}$

A) 80 B) 125 C) 27
D) 25 E) 5

16. Reduce:

$$M = \left(\frac{2}{3}\right)^x . \left(\frac{4}{9}\right)^{-2x} . \left(\frac{8}{27}\right)^x$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

17. Si:

$M = 2^{2-x} . 2^{3-x} . 2^{2x-4}$

$N = 2^{6x+2} . 2^{2-4x} . 2^{-7-2x}$

halla: $\frac{M}{N}$

A) 2 B) 1 C) 3
D) 4 E) 16

18. Efectúa:

$$N = \frac{7^{4n+19}}{7^{3n-1} . 7^{n+20}}$$

A) 2 B) 7 C) 49
D) 7^6 E) 1

19. Efectúa:

$$A = \sqrt[9]{\frac{1 + 5^3 + 5^6 + 5^9}{1 + 125^{-1} + 125^{-2} + 125^{-3}}}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución de problemas

20. Indica el exponente final de **y**, luego de reducir:

$$P = \frac{\left[(y^3)^{-2}\right]^{-4}}{y(y^{-3})^{-3}y^{(-2)^4}}; y \neq 0$$

A) –2 B) 2 C) –3
D) 4 E) 5

21. Siendo: $x + y = 2$

calcula: $M = \sqrt{\left(x^{x^x}\right)^{x^2}\left(x^{-x^{2x}}\right)^{x^y}}$

Luego no es correcto:

A) $1 \leq M \leq 2$ B) $-1 \leq M \leq 1$
C) $0,5 \leq M \leq 2,5$ D) $0 \leq M \leq 1,5$
E) $-1 \leq M \leq 0$

22. De la expresión: $E = \left(\dfrac{x^{n^{2n}}}{x^{n^n}}\right)^{n^{-n}}$

determina el exponente de x.

A) 1 B) $\dfrac{1}{n}$ C) n^2
D) $n^n - 1$ E) $n^n + 1$

23. La reproducción exponencial de insectos está dado por el modelo matemático:

$R_t = 350(7)^{0,03t}$

donde : t es el tiempo (días).

Calcula los días en donde la reproducción de dichos insectos es: 120 050

A) 20 días B) 30 días C) 70 días
D) 100 días E) 150 días

NIVEL 3

Comunicación matemática

24. Completa los recuadros en blanco, en la secuencia de solución siguiente:

De la expresión:

$$A = \frac{3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4}}{3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4}}$$

Tener en cuenta que:

$3^{x-1} = 3^x \cdot 3^{-1} = \dfrac{3^x}{3}$

$3^{x+1} = 3^x \cdot 3^1$

Sacando factor común:

$$A = \frac{3^x(3^{\square} + 3^{\square} + 3^{\square} + 3^{\square})}{3^x\left(\frac{1}{3^{\square}} + \frac{1}{3^{\square}} + \frac{1}{3^{\square}} + \frac{1}{3^{\square}}\right)}$$

Multiplicando por 3^4 al numerador y denominador, luego sacando factor común 3 dentro del paréntesis en el numerador:

$$A = \frac{3^4.\square(1 + 3^{\square} + 3^{\square} + 3^{\square})}{3^3 + 3^{\square} + 3^{\square} + \square} = 3^{\square + \square}$$

$A = 3^5 \Rightarrow \therefore A = \square$

25. Escribe > o < según corresponda en:

- $27(3^{-3}) + 9(3^{-2}) + 3(3^{-1})$ $\square$ $27(3^{-3}) + 9(3^{-2}) + 3(3^1)$
- $\dfrac{7^2.8^3.4^{2n+1}}{2^{4n+7}.64 - 16^n(32)^2}$ $\square$ $\dfrac{2.3^2.3.4^2.4.5^2.5.6^2}{(120)^3}$

Razonamiento y demostración

26. Reduce: $\dfrac{a^{3m} + a^{2m} + a^m}{a^m + a^{-m} + 1} : \dfrac{a^{3m} + 1}{a^{2m} + a^{-m}}$

A) 0 B) 1 C) a^m
D) a^{-m} E) a^{2m}

27. Si: $x^x = 2$; el equivalente de:

$S = x^{x^2} + x^{x+x^2}$, será:

A) 81 B) 6x C) $3^{x^{x2}}$
D) 2^{1+x^2} E) 3.2^x

28. Reduce:

$$N = \left(\frac{49}{343}\right)^x \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{-3x} \cdot \left(\frac{125}{49}\right)^x$$

A) –1 B) 0 C) 1
D) 2 E) 3

29. Simplifica:

$$\left\{\left\{\left[\frac{\sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x.\sqrt{x}}}}{\sqrt[4]{x:\sqrt[3]{x:\sqrt{x}}}}\right]^3\right\}^2\right\}^2$$

A) 1 B) x C) x^2
D) x^3 E) $\dfrac{1}{x}$

30. Indica el exponente final de 2 luego de reducir:

$$\sqrt{\frac{\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{\frac{1}{16}}}{4}}}{2}}$$

A) –1 B) 0 C) 1
D) 2 E) 3

31. Simplifica:

$$R = \left[\sqrt[x^{x+1}]{\left(x^{x^{x^{5x}}}\right)^x}\right]^{x^{x-(x^x)^5}}$$

A) x^2 B) x C) x^3
D) 5x E) x^x

Resolución de problemas

32. El modelo para calcular la masa de un elemento radioactivo luego de un tiempo determinado es:

$m(t) = m_o \cdot e^{kt}$ ...(i)

donde:

m_o : masa inicial (gramos, g)

m(t) : masa luego de un tiempo t (gramos, g)

t: tiempo (años)

e: número neperiano

La “**vida media**” del polonio (^{209}Po) es 103 años. Determina el tiempo en que la masa final será la octava parte de la masa inicial.

A) 307 años B) 308 años
C) 309 años D) 310 años
E) 311 años

33. Los instrumentos en la gran mayoría de los aviones que permiten determinar la presión atmosférica **P** a una determinada altitud **H** (metros, m) lo hacen mediante el siguiente modelo matemático que relaciona la presión atmosférica **P** al nivel del mar con la temperatura del aire **T** (grados Celsius, ºC):

$$P = \frac{P_o}{\frac{H}{3^{30T+8000}}}$$

Sea la presión atmosférica al nivel del mar 75,87 cm de mercurio. Si la presión atmosférica a una determinada altitud es 2,81 cm de mercurio, la temperatura es de –5ºC. Determina la altitud que marcará el instrumento.

A) 23 000 m B) 23 500 m
C) 23 550 m D) 20 000 m
E) 40 000 m

Claves

NIVEL 1	9. C	17. E	25.
1.	10. B	18. E	26. C
2.	NIVEL 2	19. E	27. E
3.	11.	20. A	28. C
4. E	12.	21. E	29. C
5. B	13.	22. D	30. A
6. D	14. D	23. D	31. B
7. E	15. D	NIVEL 3	32. C
8. D	16. A	24.	33. C



Aplicamos lo aprendido



TEMA 2: POLINOMIOS

1 Sea el polinomio $P(a;b) = 7a^4 - 7a^2b^2 + b^4$
Obtén un polinomio $S(a;b)$ que sumado a $P(a;b)$ resulte un polinomio homogéneo y completo, que cumpla:
$S(2;1) + P(2;1) = 125$ y $S(1;3) + P(1;3) = 250$

A) $a^3b + 2ab^3$
B) $5a^3b + 8ab^3$
C) $8a^3b + 7ab^3$
D) $3a^3b + 8ab^3$
E) $a^3b + ab^3$

2 Establecemos: $A(A(A(A(x)))) = 16x + 45$

Calcula: $B = \left(\left(A(5)\right)^2 + 231\right)^{\frac{1}{2}}$

A) –20
B) –10
C) 0
D) 10
E) 20

3 Si: $B(B(A(x)+1)) = 5x + 11$ y $B(x - 1) = 4x + 3$

calcula: $A\left(\frac{152}{5}\right)$

A) 1
B) 3
C) 5
D) 7
E) 9

4 Si: $-A(4x^2 - 3x - 5) + B(x^2 - x - 1) + 7x(1 - x)$
$= x(13 - 10x) + C(x^2 + 2)$
se verifica para todo x.
Calcula: $\frac{B}{A} + C$

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

5 El grado absoluto del monomio $(m + n)x^{2(m - n)}y^{3n}$ es 17, además su coeficiente es igual al grado relativo respecto a "x".
Da como respuesta: $2m - n$

A) $\frac{84}{7}$
B) $\frac{1}{7}$
C) $\frac{48}{7}$
D) 7
E) $\frac{85}{7}$

6 Se presenta un polinomio idénticamente nulo:
$(x + 101)^2(101a + 404) - (800b - 3200)^4(x - 800)$
Determina:
$(a + b + 1)^{ab}$

A) 1
B) 2
C) 0
D) 3
E) 4

7 Si: $P\left(\frac{x}{2}\right) = x^{30} - 8x^{27} + 5x + 1$; halla: P(1)

A) 9 B) 10 C) 12
D) 11 E) 13

8 Halla el término independiente y la suma de coeficientes del polinomio:

$$P(x-1) = (2x-3)^{2n} + 4x^4$$

A) 5 y 65 B) 2 y 3 C) 3 y 9
D) 5 y 8 E) 4 y 36

9 Dado el polinomio: $P(x;y) = ax^{a^b} + bx^{\sqrt[b]{a^{a-b}}}y^{12} + \frac{a}{b}x^3y^{13} + \frac{b^2}{2}y^{b^a}$
Calcula la suma de coeficientes si se sabe que es homogéneo. $(a > b)$

A) 8 B) 10 C) 9
D) 12 E) 6

10 Calcula: A . B
Si se cumple: $x^3 + 2x^2 - 1 \equiv (x+1)[Ax^2 + B(x-1)]$

A) 1 B) –1 C) 2
D) –2 E) 3

11 Si el polinomio:
$P(x) = (a+b)x^{a+b-1} + (a+b+1)\,x^{a+b-2} +$
$(a+b+2)x^{a+b-3} + ... + 29$
es completo y tiene (3a – 2b) términos, calcula (a – b).

A) 3 B) 1 C) 0
D) 4 E) 6

12 Dado el polinomio:
$P(x;y) = 2x^by^{b+1} + 5x^{2b}y^{b+3} - bx^{b-5} + by^{b+7} + 7x^{2b}y^{b+2}$
Si su grado absoluto es 33, calcula el grado relativo a x.

A) 20 B) 25 C) 15
D) 10 E) 22

13 Halla el coeficiente del monomio:
$P(x;y) = 9^{m+1} \cdot 3^{-n}x^{3m+2n} \cdot y^{5m-n}$, si su grado absoluto es 10 y el grado con respecto a x es 7.

A) 9 B) 3 C) 18
D) 27 E) 81

14 El polinomio:
$P(x;y) = mx^2y + nx^2y - 4x^2y + mxy - xy - nxy$
es idénticamente nulo. Halla: 4mn

A) 8 B) 12 C) 15
D) 10 E) 18



Claves

1. D	3. D	5. E	7. D	9. B	11. A	13. A
2. E	4. E	6. A	8. A	10. A	12. A	14. C

Practiquemos





NIVEL 1

Comunicación matemática

1. ¡A recordar!
Memoriza los polinomios por 1 minuto. Luego sin mirarlos responde las preguntas.

$P(x;y) = x^5y^5 - 3x^2y^8 + 2x^6y^4$

$ax^7 + bx^5 + cx^2 + dx + e \equiv 0$

$ax^2 + bx + 1 \equiv 0$

$P(x) = x^{100} + x^{80} + x^{70} + x^{30} + 1$

$P(x,y,z) = 3xy^2z^7 + 2x^2y^2z^6 + 151x^7yz^2 + 3z^{10}$

$P(y) = 1 + y^3 + y^5 + y^7 + y^{10}$

$P(x,y) = 3y + xy + 10x^3y^2 + 2x^2 + 7x^4y^3$

$P(x,y) = x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + 2xy^4 + 21y^5$

a) ¿Cuántos polinomios son homogéneos?
b) ¿Cuántos polinomios son completos y ordenados respecto a x?
c) ¿Cuántos polinomios son completos pero desordenados respecto a x?
d) ¿Cuántos polinomios están ordenados?
e) ¿Cuántos polinomios son idénticamente nulo?

2. De los cinco polinomios especiales que se conocen, tres de ellos se han cortado en franjas horizontales y de esta manera se muestra en el diagrama. ¿Crees poder identificarlos?

Razonamiento y demostración

3. Si $Q(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 1$
halla: $Q(-2)$

A) –45 B) 40 C) 35
D) 25 E) –29

4. Si $P(x) = x^{2004} - 7x^{2003} + 7x + 1$
halla: $P(7)$

A) 7 B) 49 C) 50
D) 57 E) 90

5. Siendo: $P(x - 8) = x^3 + x^2 + x$
halla: $P(-5)$

A) 41 B) 37 C) 38
D) 39 E) 42

6. Si: $P(x) = x^{1996} - 5x^{1995} + 2$
calcula: $P(5) - 3$

A) 2 B) 1 C) 0
D) –1 E) –2

7. Sean: $P(x + 1) = 3x + 1$
$Q(2x - 1) = x^2$
halla: $3P(2) + Q(5)$

A) 16 B) 21 C) 26
D) 31 E) 33

8. Si: $P(x + 1) = x^2 + 1$
calcula: $\dfrac{P(0) + P(1)}{P(2)}$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{8}{3}$
D) $\frac{3}{2}$ E) 0

9. Si: $P(x) = x^5 + 5x^3 + 3$
halla: $P(x) + P(-x)$

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 1

10. Si: $P(x) = x^{2n-7} - x^{2n-9} + 2x^{2n-12}$
calcula: GA(P)

A) 2n B) 2n – 7
C) 2n – 12 D) 2n – 9
E) 2

11. En el polinomio:
$P(x; y) = 2x^ny^{4m+3} - 7x^{2n}y^{2m-3} + x^{n-1}y^{4m}$
se tiene GR(y) = 23, calcula m.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 10

12. Si: $(3a + 2b)x^2 + (5a - 6b) \equiv 3x^2 - 7$
halla: $8a - 4b$

A) –1 B) –2 C) –3
D) –4 E) –5

13. Si: $P(x) = 6x - 5$,
calcula: $\dfrac{P(0) + P(1) + P(2)}{3}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

14. Si: $P(x) = x^2 - 3x + 1$
calcula: $E = \dfrac{P(-2) + P(-1)}{P(4) - P(3)}$

A) 1 B) 4 C) –4
D) 2 E) 0

Resolución de problemas

15. Obtén el valor de $\frac{m}{n}$, $(m < 0 \wedge n \in \mathbb{Z})$, si se tienen los polinomios idénticos:
$T(x) = m(x + n) + n(x + m)$
$S(x) = 3x - 56$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{7}{2}$ C) $-\frac{7}{2}$
D) $-\frac{4}{7}$ E) 1

16. Si: $P(x) = 3x + 2$;
halla: $P(x + 2) - P(x + 1)$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

NIVEL 2

Comunicación matemática

17. Memoria
Observa las figuras geométricas y los polinomios que estas contienen por un minuto. Luego de esto sin mirarlos de nuevo contesta las preguntas que se proponen más abajo.

$P(x - 2) = 4x + 4$

P(x) es mónico
$P(x) = (a + b - 2)x + 7$

$P(x;y;z) = 71x^{20}y^{10}z^2 + x^{32} + y^{32} + x^5y^{20}z^7$

$P(x;y) = x^4 - 2x^3y + 3y^4$

$P(x) = 4x^3y^2 + 3x^2 + \frac{1}{3}xy^2 + y^{100}$

$Q(x) = 2x^2 + 3xy + 8$

a. ¿Qué figura contiene al el polinomio cuyo término independiente es y^{100}?

b. ¿Qué tipo de polinomio especial es el de la figura rómbica?

c. ¿Cual es la suma de coeficientes del polinomio que está en la figura rectangular?

d. ¿Cual es la suma de coeficientes del polinomio P(x) que se obtiene en la circunferencia?

e. ¿Qué valor tiene el coeficiente principal del polinomio que està en el triángulo?

18. Completa la siguiente tabla:

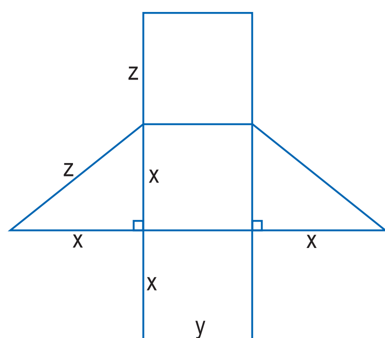
	Polinomio	Coeficientes	Término independiente	Valor numérico para: T(1) + T(0)	Valor numérico para: $\sqrt{T(2)}$	Valor numérico para: T(5)
I	$T(x) = x^3 - 4x + 1$					
II	$T(x) = x^3 + x + 6$					
III	$T(x - 3) = 3x - 5$					

19. Expresa con un polinomio:

a) El perímetro de la figura mostrada.

b) El área de la misma.

c) El volumen del sólido que se puede formar.



Razonamiento y demostración

20. En el siguiente polinomio cuadrático:

$P(x) = x^2 + bx + c$

se sabe que:

$P(0) = 2$, $P(1) = 6$

Calcula P(2).

A) 9 B) 10 C) 12
D) 3 E) 6

21. Sea $P(x) = (m - 1)x^2 + mx + m + 1$

Si:

P(2) = 4, calcula el valor de m.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

22. Sean: $P(x) = 2x + a$ y $R(x) = x - 2$

Calcula el valor de a, si:

$P(R(1)) = 8$

A) 8 B) 10 C) 6
D) 12 E) 16

23. Si: $P(P(P(x))) = x^8 \wedge Q(Q(Q(x))) = x^{27}$

calcula: $P(8) + Q(-4)$

A) 1 B) 2 C) 7
D) 0 E) 5

24. Si: $P(x) = 2x + 3$

Halla: $P(x + 2) + P(x - 2)$

A) $2x - 3$ B) $4x - 6$ C) $4x + 6$
D) $x + 3$ E) $x - 3$

25. Si: $P(x - 2) = x^2 - 4$

Halla: $P(x + 2)$

A) $x^2 + 4x$ B) $x^2 + 8x + 12$
C) $4x + 1$ D) $x + 1$
E) $x^2 + 4$

26. Si el polinomio es de séptimo grado, siendo m > 0, halla m + 3.

$P(x) = \sqrt{7}\,x^{2+m} + \sqrt{2}\,x^{3+m} + \sqrt{11}\,x^{4+m}$

A) 3 B) 6 C) 7
D) 8 E) 12

27. ¿Cuántos factores hay que tomar para que la expresión:

$P(x) = (x^6 + 1)(x^{24} + 1)(x^{60} + 1)\ldots$

sea de grado 4290?

A) 20 B) 13 C) 12
D) 11 E) 10

28. En el siguiente polinomio:

$P(x; y) = mx^{3m} + x^{3m-1}y^{5m+2} + y^{5m-6}$

se cumple: GR(y) = 2GR(x)

Calcula el grado absoluto del polinomio.

A) 13 B) 17 C) 14
D) 10 E) 8

29. En los siguientes polinomios:

$P(x; y) = x^{2m+6} + x^{2m} . y + x^{m+3} . y^m$

$Q(x; y) = x^{m+2} + x^3y^{m-2} + xy^{m-1}$

Sabiendo que el GA(P) es al GA(Q) como 8 es a 3, halla el GR(x) en el polinomio P(x; y).

A) 3 B) 8 C) 4
D) 5 E) 6

30. En el siguiente polinomio:

$P(x; y) = x^my^{n-1} + x^{m+1}y^n - x^{m-2}y^{n+2} + x^{m+3}y^{n+1}$

el GR(x) = 12 y GA(P) = 18.

Calcula el GR(y).

A) 6 B) 7 C) 8
D) 10 E) 5

31. Sabiendo que x, y, z son variables, calcula el grado absoluto de:

$$\sqrt[a]{\sqrt[b]{\frac{x^a}{y^b}}} \cdot \sqrt[b]{\sqrt[c]{\frac{y^b}{x^c}}} \cdot \sqrt[c]{\sqrt[a]{\frac{z^c}{x^a}}}$$

A) a + b + c B) abc C) 1
D) 2 E) 0

32. Sea $P(x) = x^a + x^b + x^c$, donde: c > b > a, además, el grado de P es cinco.
Calcula: c + 2

A) 7 B) 8 C) 10
D) 5 E) 17

33. Si: $P(x) = x + 1$

halla: $\dfrac{P(x+1) + P(x-1)}{P(x)}$

A) 0 B) 3 C) 2
D) 1 E) 5

Resolución de problemas

34. Determina el menor grado de homogeneidad del siguiente polinomio:

$$T(x;y;z) = a^{a^{b+c}} \sqrt[r]{x^{s}}\, y^{7n} + \sqrt[b^{b}+1]{a}\, \sqrt[s]{y^{t}}\, z^{5m} + \sqrt[t]{z^{r}}\, x^{2p}$$

A) 59 B) 60 C) 61 D) 62 E) 63

35. Se muestra el polinomio homogéneo:
$H(x;y) = 7x^5 + 5x^3y^2 + 10x^2y^3 + y^5$

Halla el polinomio que debe agregarse a H(x,y) para que el polinomio resultante sea también un polinomio homogéneo y completo, tal que la suma de sus coeficientes sea 36 y su valor numérico igual a 21 cuando **x** e **y** tomen los valores –2 y 1, respectivamente.

A) $5x^5 - 3xy^4$ B) $10x^4y - xy^4$ C) $15x^4y - 2xy^4$
D) $3y^7 - 4x^5y^2$ E) $11x^4y - 2xy^4$

36. Sea: $T(z) = cz^2 + d$

y también:
$T(T(z)) = 27z^4 + 108z^2 + e$

Determina el valor de la suma: c+d+e

A) 123 B) 124 C) 213 D) 456 E) 321

NIVEL 3

Comunicación matemática

37. Memoriza la siguiente propiedad durante 50 segundos. Luego sin mirarla compara y verifica cuál de las alternativas A, B, C coincide exactamente con la memorizada.

> En todo polinomio de una sola variable que sea completo y ordenado se cumple que el número de términos es igual al grado relativo más uno.
> $P(x) = 10x^4 + x^3 + 4x^2 + x - 1$
> $\Rightarrow$ P(x) es de 4.° grado y tiene 5 términos.

> **A**
> En todo polinomio de una sola variable que sea ordenado se cumple que el número de términos es igual al grado relativo más uno.
> $P(x) = 10x^4 + x^3 + 4x^3 + x - 1$
> $\Rightarrow$ P(x) es de 4.° grado y tiene 5 términos.

> **B**
> En todo polinomio de una sola variable que sea completo y ordenado no se cumple que el número de términos es igual al grado relativo más uno.
> $P(x) = 10x^4 + x^7 + 4x^3 + x - 1$
> $\Rightarrow$ P(x) es de 4.° grado y tiene 6 términos.

> **C**
> En todo polinomio de una sola variable que sea completo y ordenado se cumple que el número de términos es igual al grado relativo más uno.
> $P(x) = 10x^4 + x^3 + 4x^2 + x - 1$
> $\Rightarrow$ P(x) es de 4.° grado y tiene 5 términos.

38. **Crucigrama polinómico:**

Horizontales:

A: El grado de homogeneidad del polinomio es:
$P(x;y;z) = 5x^{7000}y^{300}z^{41} + 21x^{40}y^{301}z^{7000} + 17x^{600}y^{5000}z^{1741}$

D: La suma de los grados relativos de **x** e **y** del polinomio:
$P(x;y) = \sqrt{2}\,x^{500}y + 3x^2y^{67} + 37xy^{68} + a^{a^{a}}x^{480}y^2$ es:

E: La mitad del grado absoluto del monomio es:
$Z(x;y;z) = x^{900}y^{200}z^{284}$

Verticales:

C: Del polinomio idénticamente nulo:
$P(x) = (A-600)x^2 + (B-60)x + (C-6)$;
El valor de A + B + C es:

B: El término independiente del polinomio:
$P(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 12$; es:

A: En los polinomios idénticos, el valor de **a** + **b** + **c** + **d** es:
$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$Q(x) = 75x^3 + 20x^2 + 15x + 595$

A			B
	C		
D			
	E		

Razonamiento y demostración

39. Si: $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x}$

calcula: $\sum_{i=1}^{10} f(i)$

A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{9}{10}$ C) $\frac{10}{9}$ D) $\frac{10}{11}$ E) $\frac{11}{10}$

40. Sea:

$P\left(\frac{1}{x}+1\right)=x+1;$

calcula: P(2) – P(3) – P(4)

A) 3/5 B) –5/6 C) 5/7 D) –5/7 E) –4/3

41. Sea: P(x) = 2x, calcula:

P(1) + P(2) + P(3) + ... + P(30)

A) 900 B) 920 C) 870 D) 930 E) 960

42. Si $P(x)=2x^{99}-64x^{94}+x-5$, calcula:

E = P(2) + P(–1) + P(1)

A) –141 B) –143 C) –72 D) –75 E) –66

43. Si: P(x + 5) = 3x – 2, calcula m, si:

P(2x + m) = 6x + 7

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 8

44. Si: $f\left(\frac{1}{x}+2\right)=x;\quad x\neq 0$

halla: $f(3)^{f(5)^{f(7)}}$

A) –2 B) –1 C) 1 D) 2 E) 4

45. Indica el grado del polinomio:

$P(x;y)=x^{a-5}y^{\frac{a}{2}+1}+x^{a-4}y^{\frac{a}{4}+1}+x^{11-a}$

A) 6 B) 8 C) 7 D) 3 E) 4

46. Si el grado absoluto de Q es 17 y el GR(y) es 9, halla: n – m

$Q=x^{m}y^{2n+1}z\left[x^{m-1}yz^{n-1}+(xy)^{m}z^{n}\right]$

A) 0 B) 5 C) 1 D) 2 E) 3

47. Halla el valor de **ab**, si al efectuar la expresión:

$M(x;y)=x^{3}y^{b}(x^{-2}y)^{-a}y^{4}$, el grado relativo de x es 13 y el grado absoluto 18.

A) 10 B) 20 C) 30 D) 15 E) 21

Resolución de problemas

48. Del siguiente polinomio homogéneo:

$S(x;y;z)=a^{a}x^{(2a+3)^{b}b^{3a}}+y^{(2a-3)^{a}b^{6b}}-\frac{1}{c}z^{b^{3a+6b}}$

determina el valor de:

$\lambda=\sqrt[a]{(a^{a})^{b^{3}}}$, siendo **a**: impar y no fraccionario.

A) $\frac{1}{27}$ B) 27 C) 72 D) 6 E) 1

49. Sea.

$P(x)=(x+1)(x^{2}+2)(x^{3}+3)$ ... **n** paréntesis.

Sabiendo que el término independiente es 5040, halla el grado del polinomio.

A) 26 B) 27 C) 28 D) 29 E) 30

50. Se presenta el siguiente polinomio completo y ordenado:

$E(x)=px^{m+n}+rx^{n+p}+mx^{p+q}+nx^{q+r}+qx^{r+121}$

Calcula la suma de sus coeficientes.

A) –105 B) –115 C) 110 D) 90 E) –121

51. Determina el grado del polinomio entero que está ordenado necesariamente en forma ascendente.

$R(x)=x^{7-2a}-5x^{3a-2}+21x^{19-2a}$

A) 1 B) 3 C) 5 E) 7 E) 9

52. El polinomio mostradose anula para más de dos valores de "x":

$I(x)=bx^{2}(cx^{2}+b^{6})-7(3x^{4}-x^{2}+1)+cx^{2}(c^{6}+7ab)-a$

Halla el valor de:

$J=\frac{3b^{6}}{c}+\frac{3c^{6}}{b}$

A) 143 B) 144 C) 145 D) 146 E) 147

53. Si: R(z) = S(z); calcula: e + f + g + h

R(z) = z(z + 1) (z + 2)

$S(z)=e(z-2)^{3}+f(z-2)^{2}+g(z-2)+h$

A) 60 B) 70 C) 80 D) 90 E) 100

Claves

NIVEL 1	12. D	23. D	35. C	46. C
1.	13. A	24. C	36. A	47. C
2.	14. B	25. B	NIVEL 3	48. B
3. E	15. D	26. B	37.	49. C
4. C	16. C	27. E	38.	50. B
5. D	NIVEL 2	28. B	39. D	51. C
6. D	17.	29. B	40. B	52. D
7. B	18.	30. B	41. D	53. A
8. D	19.	31. E	42. A	
9. A	20. C	32. A	43. E	
10. B	21. A	33. C	44. C	
11. A	22. B	34. A	45. B	

Aplicamos lo aprendido





TEMA 3: PRODUCTOS NOTABLES

1 Halla: $F = x - y$

Si: $x^2 + y^2 = 5$

$xy = 2 \quad \wedge \quad x - y > 0$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

2 Calcula:

$$F = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$$

A) 2,4 B) 1,6 C) 1,8
D) 2,9 E) 0

3 Efectúa:

$(a + b)(a - b) + (a - 2)(a + 2) - 2a^2 + b^2$

A) –2 B) –5 C) –3
D) –1 E) –4

4 Simplifica:

$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) - [x(x + 3)]^2$;

siendo $x^2 + 3x = a$

A) a B) 1 C) –a
D) 2a E) –2a

5 Reduce:

$(a + 2)^3 - (a - 2)^3$

A) 0 B) 8 C) 16
D) $16 + 6a^2$ E) $16 + 12a^2$

6 Si: $a + b = 10$ y $a^2 + b^2 = 50$;

calcula el valor de: $a^3 + b^3$

A) 216 B) 250 C) 200
D) 165 E) 125

7 Efectúa:
$R = (x + y)(x^2 - xy + y^2) - (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

A) y^3 B) $2y^3$ C) 2
D) 1 E) y

8 Si: $x = a - b$; $y = b - c$; $z = c - a$
halla: $M = \dfrac{(x+y)^2 + (x+z)^2 + (y+z)^2}{xy + xz + yz}$

A) 1 B) 2 C) –2
D) 3 E) –3

9 Siendo a, b y c tres números reales que cumplen la igualdad:
$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Además: $a + b + c \neq 0$
Halla: $M = \dfrac{(ab^2c^3)^2}{a^{12} + b^{12} + c^{12}}$

A) 3 B) 1/2 C) 1/3
D) 1/4 E) 2

10 Si: $a + b + c = 0$;
halla el valor de: $C = \dfrac{2[a^2 + b^2 + c^2] - 2(ab + ac + bc)}{a^2 + (a+b)^2 + b^2}$

A) $a^2 + b^2$ B) 2 C) 0
D) 3 E) $(a + b)^2$

11 Si $a + b + c = 0$, halla: $\dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{(a+b)(a+c)(b+c)}$

A) 3 B) –3 C) 1
D) $a + b + c$ E) abc

12 Halla: $M = a + b$
Si: $a^2 + b^2 = 5$; $ab = 2 \;\wedge\; a + b > 0$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

13 Efectúa:
$S = \dfrac{(a+b)^4 - (a-b)^4}{2a(a^2 + b^2)}$

A) 1 B) 4b C) 2b
D) 8ab E) $\dfrac{a}{b}$

14 Reduce:
$(x + 2)(x - 2) - (x + 3)(x - 3)$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6



Claves

1. B	3. E	5. E	7. B	9. C	11. B	13. B
2. B	4. D	6. B	8. C	10. D	12. D	14. D

Practiquemos





NIVEL 1

Comunicación matemática

1. ¿Qué expresión(es) luego de ser reducida(s) resultan(n) 1?

I. $\dfrac{(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)}{3(a+b)(a+c)(b+c)}$

II. $\dfrac{(a+b+c)^3+3abc}{a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+ac+bc)}$

III. $\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{ab}$

A) Sólo I B) Sólo II
C) Sólo III D) I y II
E) I y III

2. Golpe de vista

Descubre qué Producto Notable no tiene su pareja y qué otro aparece tres veces.

$(a+b)^2+(a-b)^2 \equiv 2(a^2+b^2)$

$(a-b)^2 \equiv a^2-2ab+b^2$

$(a-b)(a^2+ab+b^2) \equiv a^3-b^3$

$(a+b)(a^2-ab+b^2) \equiv a^3+b^3$

$(a+b)^2 \equiv a^2+2ab+b^2$

$(a+b)(a-b) \equiv a^2-b^2$

$(a+b)^2 \equiv a^2+2ab+b^2$

$(a-b)(a^2+ab+b^2) \equiv a^3-b^3$

$(a+b)(a^2-ab+b^2) \equiv a^3+b^3$

$(a+b)(a-b) \equiv a^2-b^2$

$(a-b)^2 \equiv a^2-2ab+b^2$

$(a+b)(a^2-ab+b^2) \equiv a^3+b^3$

Razonamiento y demostración

3. Si: $m^2+\dfrac{1}{m^2}=2$, halla: $\dfrac{m^{12}+1}{3m^6}$

A) 2 B) 1 C) $\frac{3}{2}$
D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{2}{6}$

4. Efectúa:

$R=(x+3)(x^2-3x+9)(x-3)(x^2+3x+9)+729$

A) x^6 B) x^3 C) x^2
D) x^4 E) 1

5. Efectúa:

$E=(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}-1)$

A) 2 B) 4 C) 6
D) 5 E) 3

6. Reduce:

$S=\dfrac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^3+b^3}$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

7. Efectúa:

$R=\dfrac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^3-b^3}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

8. Si x; y; z $\in \mathbb{R}$, tal que:

$x^2+y^2+z^2=xy+xz+zy$

calcula: $\dfrac{x^3+y^3}{z^3}$

A) 3 B) 2 C) 1
D) 0,5 E) 0,2

9. Si se cumple: $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}$;

calcula el valor de: $x^2+\dfrac{1}{x^2}$

A) 0 B) 1 C) –1
D) 2 E) 3

10. Si: $x+\dfrac{1}{x}=2$, halla: $E=x^2+\dfrac{1}{x^2}$

A) 1 B) 0 C) 2
D) 3 E) 4

11. Efectúa:

$H=\dfrac{(5x+3y)^2-(5x-3y)^2}{12xy}$

A) 6 B) 4 C) 5
D) 2 E) 1

Resolución de problemas

12. Si: $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=2$

calcula: $M=\dfrac{2a^2b+ab^2}{ab}$

A) 1a B) 2a C) 3a
D) 4a E) 5a

13. Determina el valor de S:

$S=(x+y+1)^3-(x+y)^3-3(x+y)(x+y+1)$

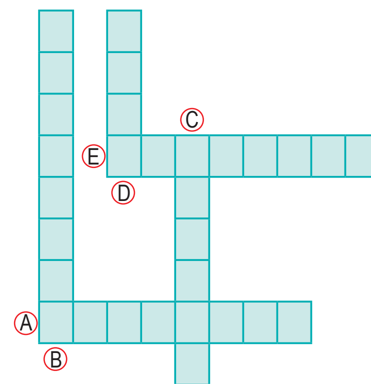
A) 2 B) –1 C) 1
D) –2 E) 0

NIVEL 2

Comunicación matemática

14. Identigrama

Fíjate bien en las identidades y luego escribe el nombre de cada uno junto a la letra que corresponde.



A: Identidad de:

$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

B: Identidad de:

$(ax+by)^2+(ay-bx)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$

C: Identidad de:

$x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

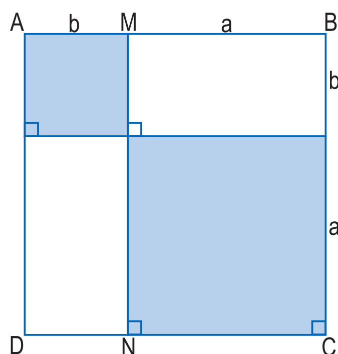
D: Binomio al:

$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

E: Binomio al:

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

15. Verifica la verdad o falsedad, de las alternativas planteadas, según corresponda:



I. El área del cuadrado ABCD menos el área del cuadrado de menor región sombreada es: $a(a + 2b)$ ( )

II. La diferencia de las áreas sombreadas (mayor menos el menor) es: $(a - b)^2$ ( )

III. El área del rectángulo AMND es:
$b\sqrt{(a+b)^2}$ ( )

Razonamiento y demostración

16. Si: $x + \dfrac{1}{x} = 3$, halla: $M = x^4 + \dfrac{1}{x^4}$

A) 40 B) 47 C) 43 D) 81 E) 37

17. Efectúa:

$$R = \sqrt[4]{35(6^2+1)(6^4+1)+1}$$

A) 6 B) 36 C) 216 D) $\sqrt{6}$ E) 1

18. Calcula:

$$S = \sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-64}}\cdot\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-64}}$$

A) 6 B) 3 C) 8 D) 4 E) 10

19. Efectúa:

$$S = (x^n+6)(x^n+4)-(x^n+3)(x^n+7)$$

A) 3 B) 5 C) x^n D) 10 E) 15

20. Si: $m + m^{-1} = 5$; calcula: $m^3 + m^{-3}$

A) 125 B) 165 C) 132 D) 110 E) 100

21. Reduce:

$$E = \frac{(3x+2y)^2+(2x-3y)^2}{(x+y)^2+(x-y)^2}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{5}{2}$ D) 3 E) $\frac{13}{2}$

22. Calcula:

$$P = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}$$

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{6}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D) $\sqrt{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

23. Si $x^2 + x^{-2} = 3$, calcula: $x^6 + x^{-6}$

A) 9 B) 18 C) 27 D) 30 E) 36

Resolución de problemas

24. Reduce:

$$B = \frac{4(a+b)^2-(a-b)^2}{(3a+b)(a+3b)}$$

A) 0 B) 2 C) 3 D) 4 E) 1

25. Si: $a + b = 4$
$ab = 1$

Calcula: $a^3 + b^3$

A) 56 B) 58 C) 62 D) 72 E) 52

NIVEL 3

Comunicación matemática

26. Si se cumple que:
$(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 + (a^2 + b^2 + c^2) = ab + ac + bc$

Verifica la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

I. $\dfrac{a^3}{b^3} + \dfrac{a^3}{c^3} + \dfrac{b^3}{c^3} \equiv 3a^3b^3c^3$ ( )

II. $a^2b^2c^2 + (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \equiv \frac{1}{3}a^6 + \frac{1}{3}b^6 + \frac{1}{3}c^6$ ( )

III. $(a + b)^3 + (a + c)^3 + (b + c)^3 \equiv 8(a^3 + b^3 + c^3)$ ( )

IV. $(a + b + c)^3 - (a - b)^3 \equiv 2(a - c)^3 + 3(b - c)^3 + 26(a^2 + b^2 + c^2)$ ( )

27. Memoria

Memoriza el texto durante 1 minuto; luego tapa las descripciones y responde con SÍ o NO a las preguntas planteadas:

- Binomio al cuadrado:
  $(a - b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$
- En la Identidad de Legendre hay un coeficiente que es el único número primo par (2):
  $(a + b)^2 + (a - b)^2 \equiv 2(a^2 + b^2)$
- En la multiplicación de binomios con un término común, el resultado nos proporciona cuatro términos:
  $(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a + b)x + ab$

- Del binomio al cubo se deduce la Identidad de Cauchy.

$(a+b)^3 \equiv a^3 + \underbrace{3a^2b + 3ab^2}_{} + b^3$

Sacando el factor común: 3ab

$(a+b)^3 \equiv a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

(Identidad de Cauchy)

1. ¿El único número primo par, se refiere a la Identidad de Legendre? [ ]

2. ¿En la identidad binomio al cuadrado nos mencionan que se proporciona cuatro términos? [ ]

3. ¿A partir de la Identidad del binomio al cubo se deduce la identidad de Cauchy? [ ]

Razonamiento y demostración

28. Si: $x + \frac{1}{x} = 2$

Calcula: $M = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$

A) 0 B) 1 C) 5 D) 16 E) 25

29. Calcula: $P = \frac{x^7 - x^5 + x^3}{x^5}$

Si: $x^2 - 3x + 1 = 0$

A) 7 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

30. Efectúa:

$E = \frac{(3x+1)^2 + (3x-1)^2}{2} - 9x^2$

A) 1 B) 2 C) x D) 2x E) 0

31. Efectúa:

$E = (x+1)(x-1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$

A) $x^{16} - 1$ B) $x^8 - 1$ C) $x^4 - 1$
D) $x^9 - 1$ E) $x^{14} - 1$

32. Efectúa:

$A = \frac{4x^2 - 1}{2x+1} - \frac{9x^2 - 1}{3x+1}$

A) x B) 2x C) 2x–2 D) –x E) –2x

33. Efectúa:

$E = (a+5)(a-5)(a^2+5^2)(a^4+5^4) - a^8$

A) 5^4 B) -5^8
C) -5^6 D) -25^4
E) Hay dos claves correctas

34. Reduce:

$M = \frac{(x+2y-7z)^3 + (x-2y+7z)^3 - 8x^3 + 6x(x+2y-7z)}{(x-2y+7z)}$

A) x B) 2xyz C) 0
D) x – y E) $2y^2$

35. Si:

$\begin{cases} x + y = \sqrt{3} \\ xy = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}} \end{cases}$

Halla: $P = x^3 + y^3$

A) 3 B) 2 C) 0 D) 4 E) 5

Resolución de problemas

36. Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ es un trinomio cuadrado perfecto, calcula: $\frac{8b^2}{ac}$

A) 8 B) 4 C) 2 D) 32 E) 64

37. Simplifica:

$N = \frac{[(x+1)(x+2)+(x-3)(x+4)-(x+5)(x-6)-20]^2}{(x^2+5x+2)(x^2+5x+3)-5(x^2+5x)-6}$

A) $x^2 + 5x$ B) $(x^2 + 5x)$ C) 1
D) $5(x^2 + 5)$ E) 0

Claves

NIVEL 1
1. D
2.
3. D
4. A
5. A
6. B
7. A
8. B
9. E
10. C
11. C
12. C
13. C

NIVEL 2
14.
15.
16. B
17. B
18. D
19. A
20. D
21. E
22. E
23. B
24. E
25. E

NIVEL 3
26.
27.
28. A
29. E
30. A
31. A
32. D
33. B
34. C
35. C
36. D
37. C

Aplicamos lo aprendido





TEMA 4: COCIENTES NOTABLES

1 Si A es el penúltimo término del CN generado por: $\frac{x^{40}+y^{10}}{x^4+y}$, halla el término A.

A) x^9y^8 B) $-x^4y^8$ C) x^4y^8
D) x^8y^9 E) $-x^8y^9$

2 Si el cociente notable $\frac{x^{30}-x^m}{x^n+y^2}$, tiene 10 términos en su desarrollo, calcula: $B = n^4 - 3m$

A) 20 B) 24 C) 22
D) 25 E) 21

3 Sabiendo que el CN $\frac{a^{m-2}-b^{n+5}}{a^3-b^2}$ tiene 9 términos en su desarrollo, calcula: $E = \sqrt{m-n}$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 7

4 Calcula el vigésimo tercer término del desarrollo del cociente: $\frac{x^{120}-y^{96}}{x^5-y^4}$. Da como respuesta la suma de sus exponentes.

A) 90 B) 92 C) 93
D) 95 E) 97

5 Calcula el término de lugar 17 en: $\frac{x^{120}-y^{180}}{x^2-y^3}$

A) $x^{84}y^{46}$ B) $x^{86}y^{48}$ C) $x^{88}y^{50}$
D) $x^{80}y^{42}$ E) $x^{82}y^{44}$

6 Calcula **n** si la división: $\frac{x^{5n+3}-y^{5n+30}}{x^{n-1}-y^{n+2}}$ origina un cociente notable.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

7 Expresa el polinomio: $P(x) = x^{12} + x^8 + x^4 + 1$ como un cociente notable.

A) $\dfrac{x^{16} - 1}{x^4 - 1}$ B) $\dfrac{x^{16} + 1}{x^4 + 1}$ C) $\dfrac{x^8 + 1}{x^3 - 1}$
D) $\dfrac{x^{16} - 1}{x^4 + 1}$ E) $\dfrac{x^8 - 1}{x^3 + 1}$

8 Halla t_8 si el cociente es notable:

$$\frac{x^{5m+3} - a^{5(m+6)}}{x^{m-1} - a^{m+2}}$$

A) $a^5 x^{14}$ B) $x^2 a^{35}$ C) $-a^{35} x^2$
D) $a^{40} x^2$ E) x^{16}

9 Halla el término de lugar 35, en:

$$\frac{x^{100} - y^{100}}{x - y}$$

A) $x^{25}y^{40}$ B) $x^{40}y^{30}$ C) $x^{35}y^{25}$
D) $x^{65}y^{34}$ E) $x^{50}y^{40}$

10 Halla el grado del cuarto término del siguiente cociente notable:

$$\frac{x^{35} - 128}{x^5 - 2}$$

A) 12 B) 8 C) 24
D) 15 E) 14

11 Halla **n** si el décimo término del desarrollo: $\dfrac{x^{3n} - y^{15n}}{x - y^5}$; tiene grado absoluto: 185

A) 40 B) 27 C) 45
D) 60 E) 50

12 En el siguiente cociente notable: $\dfrac{x^{6n+3} + a^{6n-22}}{\sqrt{x}^{\,n-6} + \sqrt{a}^{\,n-8}}$

halla el número de términos.

A) 20 B) 15 C) 30
D) 25 E) 10

13 Calcula el antepenúltimo término de: $\dfrac{x^{51} + y^{34}}{x^3 + y^2}$

A) $-x^3y^{17}$ B) x^6y^{34} C) x^6y^{28}
D) y^{34} E) $x^{42}y^4$

14 Si el grado relativo de x e y de uno de los términos de $\dfrac{x^m - y^n}{x^2 - y}$ es 8; determina $\dfrac{m}{n}$.

A) 1 B) -1 C) 2
D) 17 E) 3



Claves

1. C	3. C	5. B	7. A	9. D	11. E	13. C
2. E	4. C	6. C	8. B	10. D	12. D	14. C

Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

Analiza y escribe verdadero (V) o falso (F), según corresponda:

1. $\dfrac{x^n - a^n}{x - a}$: Es un cociente notable para **n** par o impar. ( )

2. $\dfrac{x^n + a^n}{x + a}$: Es un cociente notable para **n** par. ( )

3. $\dfrac{x^n - a^n}{x + a}$: Es un cociente notable para **n** par. ( )

4. $\dfrac{x^n + a^n}{x - a}$: No es un cociente notable ya sea **n** par o impar. ( )

Razonamiento y demostración

5. Escribe la diferencia principal que se encuentra en el desarrollo de los cocientes notables:

$\dfrac{x^n + a^n}{x + a}$ (n: impar) y $\dfrac{x^n - a^n}{x + a}$(n: par)

Respuesta:

____

____

____

6. Efectúa y simplifica: $\dfrac{x^{3n}}{x^n - 1} - \dfrac{x^{2n}}{x^n + 1} - \dfrac{1}{x^n - 1} + \dfrac{1}{x^n + 1}$

A) $x^n + 1$ B) $x^{2n} - 1$ C) $x^n - 1$
D) $x^{2n} + 2$ E) $x^{2n} + 1$

7. Calcula el sexto término del cociente notable: $\dfrac{512x^9 - y^{18}}{2x - y^n}$

A) $2x^3y^5$ B) x^3y^5 C) x^3y^{10} D) $8x^3y^5$ E) $8x^3y^{10}$

8. Halla el valor de (m + n) si el t_{60} del desarrollo de: $\dfrac{x^{148m} - y^{296n}}{x^{2m} - y^{4n}}$ es $x^{140}y^{1416}$, si es cociente notable.

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

9. Calcula m, sabiendo que el sexto término del CN al que da lugar la división: $\dfrac{a^{32} - b^{72}}{a^4 - b^9}$ es igual a: $a^8 . b^{m+5}$

A) 27 B) 40 C) 42 D) 45 E) 50

10. Se sabe que el resto de la división: $\dfrac{x^m - z^m}{x^n - z^n}$ es cero. Según esto, ¿cuántos términos tiene el cociente?

A) mn B) mn^{-1} C) $m^{-1}n$ D) $\dfrac{m}{2n}$ E) $\dfrac{n}{2m}$

11. En el cociente notable: $\dfrac{x^n - y^m}{x^3 + y^4}$ se sabe que tiene 14 términos. Calcula (m + n).

A) 56 B) 42 C) 84 D) 89 E) 98

Resolución de problemas

12. Calcula t, sabiendo que el grado respecto a **y** del término de lugar 7 en el CN correspondiente a la división: $\dfrac{x^{70} - y^{m+t}}{x^7 - y^t}$ es 12.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

13. Si el término central del cociente notable $\dfrac{x^{mn} - y^p}{x^n - y}$ es x^6y^3, calcula el número de términos del cociente.

A) 21 B) 7 C) 14 D) 6 E) 28

NIVEL 2

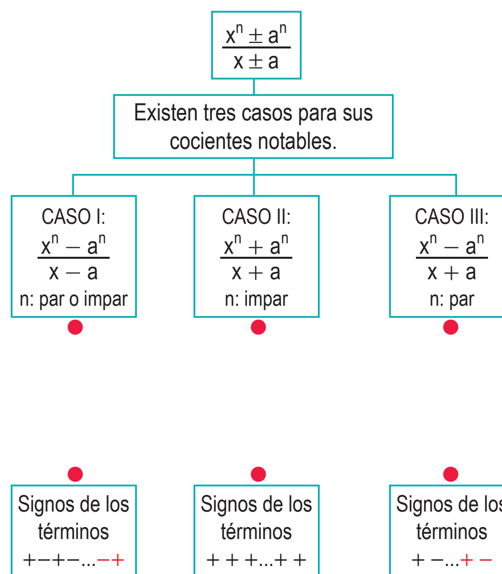
Comunicación matemática

14. Completa los espacios en blanco:
En el cálculo de un término cualquiera de lugar **k** de un cociente notable:

$\dfrac{x^n \pm a^n}{x \pm a}$; $t_k = \pm x^{n-k} a^{k-1}$

- Cuando el signo del divisro es negativo: x–a
  $\Rightarrow t_k =$ ____ (siempre)
- Cuando el signo del divisor es positivo: x + a.
  $\Rightarrow t_k = +$; k: ____
  $\Rightarrow t_k = -$; k: ____

15. Completa el siguiente esquema de los cocientes notables, luego une con una línea lo que corresponda:



Razonamiento y demostración

16. Evaluación de condiciones:

Identifica qué condiciones serán necesarias para satisfacer lo planteado y marca la clave que creas sea conveniente:

A. Solo la condición i es suficiente.

B. Solo la condición ii es suficiente.

C. Se pueden usar ambas condiciones por separado.

D. Faltan condiciones.

E. No es posible encontrar la solución general en el campo de los números naturales.

I. Determina el único término central del cociente notable:

$$\frac{x^{2a}-y^{a}}{x^{2}-y}$$

Condiciones:

i. Si: $a=4$
ii. Si: $a=3$

Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

II. Verifica si es un cociente notable:

$$\frac{(-1)^{p}(x^{9}+y^{6})}{(-1)^{q}(x^{3}+y^{2})}$$

Condiciones:
i: Si: p= impar y q= impar
ii: Si: p= par y q= par

Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

III. Si es cociente notable, ¿es posible encontrar su desarrollo general?
¿Con qué condición?

$$\frac{(3x^{2})^{-n}-(21y)^{-n}}{3x^{2}+21y}$$

Condiciones:
i. Si : n= 100
ii. Si: n=200

Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

17. Halla el valor numérico del tercer término del desarrollo de:

$$\frac{x^{a+1}-y^{20b}}{x^{2}-y^{b}}$$

para: $x=0,5$; $y=2$; $b=17$

A) 5 B) –3 C) –1
D) 1 E) 3

18. Halla el valor numérico del término de lugar 29 del cociente notable:

$$\frac{(x+3)^{36}-x^{36}}{2x+3}; \text{ para } x=-1$$

A) 128 B) 120 C) 138 D) 118 E) 110

19. Halla el quinto término del desarrollo:

$$\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[7]{y}}{\sqrt[15]{x}+\sqrt[35]{y}}$$

A) $\sqrt[35]{y^{4}}$ B) $\sqrt[35]{y^{5}}$ C) $\sqrt[15]{y^{4}}$ D) $\sqrt[15]{y^{5}}$ E) $\sqrt[15]{x^{4}}$

20. Calcula el número de términos en el siguiente cociente notable:

$$\frac{x^{n+1}-y^{40}}{x^{2}-y^{n-1}}$$

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

21. Si la división: $\frac{x^{m^2+7}-y^{9m-13}}{x^{2}-y^{2}}$ origina un cociente notable, calcula el valor de m.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

Resolución de problemas

22. En el desarrollo del cociente notable:

$$\frac{x^{2n}-y^{3n}}{x^{2}-y^{3}}$$

hay un término cuyo grado es el doble del número de términos. ¿Qué lugar ocupa este término?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

23. En la siguiente división: $\frac{a^{3n}-b^{4m}}{a^{3}-b^{4}}$, el término de lugar 10 de su cociente notable es $a^{21}b^{r}$. Calcula $(n+m+r+3)$.

A) 2 B) 7 C) 70 D) 69 E) 73

NIVEL 3

Comunicación matemática

24. Dadas las expresiones:

I. $\frac{x^{60}-y^{30}}{x^{4}-y^{2}}$ II. $\frac{x^{140}-1}{x^{5}+1}$

III. $\frac{x^{27}-3^{27}}{x^{3}+27}$ IV. $\frac{x^{80}+y^{40}}{x^{4}+y^{2}}$

V. $\frac{(x+2)^{10}-(x+1)^{10}}{(x+2)-(x+1)}$

Reconoce de las expresiones; cuál o cuáles son cocientes notables.

A) I, II, III B) I, II, IV C) II, IV, V
D) II, IV, V E) I, II, V

25. En los desarrollos de los cocientes notables escribe los exponentes faltantes de tal manera que cumpla con lo principal de sus características:

a. $\dfrac{x^6 - a^6}{x - a} = x^5 + x^{\square}a + x^3a^2 + x^{\square}a^{\square} + xa^4 + a^{\square}$

b. $\dfrac{32x^5 + 1}{2x + 1} = 16x^{\square} - 8x^{\square} + 4x^{\square} - 2x + 1$

c. $\dfrac{a^{3n} - b^{4n}}{a^3 + b^4} = a^{3(n-1)} - a^{3\cdot\square}b^4 + a^{3(n-3)}b^{4\cdot\square} - \ldots$
$+ a^{3\cdot\square}b^{4\cdot\square} - b^{4\cdot\square}$; n: par

d. $\dfrac{x^{36} - 1}{x^4 - 1} = x^{4\cdot\square} + x^{4\cdot\square} + x^{4\cdot\square} + x^{20} + x^{4\cdot\square} + \ldots + x^{4\cdot\square} + 1$

e. $\dfrac{10^{20} - 1}{9999} = 10^{16} + 10^{4\square} + 10^{4\square} + 10^{4\square} + 1$

Razonamiento y demostración

26. Calcula (n – m), si el decimoséptimo término de:

$\dfrac{x^m - y^n}{x^5 - y^7}$ es $x^{115}y^{112}$.

A) 80 B) 70 C) 60 D) 50 E) 40

27. Halla el vigésimo término del desarrollo del cociente notable:

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{\sqrt[10]{x - 1} - 1}$$

A) x – 1 B) 2 C) 3 D) 1 E) 4

28. Se sabe que: b – a = 6; además la siguiente división genera un cociente notable.

$$\frac{x^a + y^b}{x^3 + y^5}$$

Halla el término central.

A) xy^3 B) $-xy^3$ C) x^3y^5
D) $-x^3y^5$ E) $-xy$

29. Halla n, si la división es un cociente notable de 81 términos.

$$\frac{x^{27^{5n}} + 1}{x^{3^{13n}} + 1}$$

A) 6 B) 8 C) 0
D) 2 E) Imposible calcular

30. Calcula m, si la división:

$\dfrac{x^{13m+1} - y^{8m+2}}{x^{m+1} - y^m}$, genera un CN.

A) 4 B) 6 C) 3 D) 2 E) 5

31. ¿Qué lugar ocupa en el desarrollo del cociente notable $\dfrac{a^{60} - b^{24}}{a^5 + b^2}$, el término de grado absoluto igual a 31?

A) Sexto B) Noveno C) Segundo
D) Tercero E) Décimo

Resolución de problemas

32. Uno de los términos del desarrollo del siguiente cociente notable es $x^{18}y^{24}$; según esto calcula el octavo término de su desarrollo.

$$\frac{x^{6n} - y^{10p}}{x^{n-4} + y^p}$$

A) $x^{12}y^{28}$ B) $-x^{28}y^{12}$ C) $x^{28}y^{12}$
D) $-x^{12}y^{28}$ E) $x^{12}y^{12}$

33. Halla el número de términos del cociente notable que tiene dos términos consecutivos de la forma $x^{46}y^{72} \wedge x^{44}y^{78}$.

A) 36 B) 35 C) 72 D) 30 E) 118



Claves

NIVEL 1	8. E	15.	23. E	29. D
1.	9. B	16.	NIVEL 3	30. D
2.	10. B	17. D	24. E	31. B
3.	11. E	18. A	25.	32. D
4.	12. A	19. A	26. A	33. A
5.	13. B	20. A	27. D	
6. D	NIVEL 2	21. C	28. D	
7. E	14.	22. B		



Aplicamos lo aprendido



TEMA 5: FACTORIZACIÓN

1 Factoriza:

$N(x) = x^6 - 19x^3 - 216$

e indica la suma de los factores primos lineales.

A) $3x + 1$　B) $2x - 3$　C) $2x + 1$
D) $2x - 1$　E) $2x + 3$

2 Factoriza:

$F(x) = 25x^4 - 109x^2 + 36$; luego indica cuántos factores primos se obtienen.

A) 1　B) 2　C) 3
D) 4　E) 5

3 Factoriza:

$P(x) = x^6 + 4x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x$; e indica el factor lineal

A) x　B) $2x + 2$　C) $2x + 1$
D) $3x + 1$　E) $3x + 2$

4 Indica un factor del polinomio:

$F(a; b; c) = a^2 + a - b^2 + b - c^2 - c + 2bc$

A) $a + b - c + 1$　B) $a - b + 1$　C) $a+1$
D) $a - b + c + 1$　E) $a - b - c$

5 Factoriza:

$M(x) = (x^2 + x - 6)^2 - 6(x^2 + x) + 6^2$

Señala el número de factores primos.

A) 1　B) 2　C) 3
D) 4　E) 5

6 Halla un término de un factor primo de:

$F(x; y; z; w) = (x + y)(x + z) - (y + w)(z + w)$

A) $-yz$　B) x　C) yz
D) $-zw$　E) xy

7 Factoriza:

$R(x; y) = x^5 - y^5 + (xy)^2(y - x)$; e indica los factores de segundo grado.

A) $x^2 - y^2$ B) $x^2 + y^2$ C) $x^2 - xy + y^2$
D) $x^2 + xy + y^2$ E) $x^2 + y^2 + 1$

8 Factoriza:

$F(x; y) = (x + y + z)(xy + xz + yz) - xyz$

Señala la suma de factores primos.

A) $x + y + z$ B) $x^2 + y^2$ C) $2(x+y+z)$
D) $4(x + y + z)$ E) 0

9 Factoriza:

$F(x; y; z) = x(x^2 + yz) + z(x^2 + y^2) - y^3$

luego indica un factor primo.

A) $x + y - z$ B) $x + y + z$ C) $x - y + z$
D) $2x + y + z$ E) $3x + y - z$

10 Factoriza:

$P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x - 2$; e indica cuántos factores primos tiene.

A) 1 B) 3 C) 5
D) 7 E) 2

11 Factoriza:

$P(a; b; c) = (a^3 + b^3 + c^3)^3 - a^3 - b^3 - c^3$

Indica el número de factores primos.

A) 4 B) 3 C) 6
D) 5 E) 2

12 Factoriza:

$F(a; b) = a^6 - 64b^6$

Indica el número de factores primos.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

13 ¿Cuántos factores cuadráticos tiene el binomio $P(x) = x^8 - 1$?

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

14 Factoriza:

$P(x; y) = 64x^7y^7 - xy^{13}$; luego indica el número de factores primos.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 12 E) 7



Claves

1. D	3. A	5. D	7. C	9. C	11. B	13. B
2. D	4. D	6. B	8. C	10. E	12. D	14. C

Practiquemos





NIVEL 1

Comunicación matemática

1. **El manuscrito misterioso**

A continuación se ha escrito una definición en clave. ¿Puedes descifrarlo?. Ten en cuenta que cada casilla tiene un número que representa a una letra del alfabeto: 1 = A; 2 = B; no consideres (Ñ, LL, CH).

5 1 21 5 16 18 3 5 4 5

18 19 13 1 3 5 19

19 5 19 22 19 4 5 21

16 12 15 13 14 21 14

13 21 12 20 3 9 14

9 4 9 1 4 4 19 15

1 16 12 15 13

5 20 15 4 5 21 3 5 20

3 13 15 4 5 14 21 13

1 15 19 3 1 5 19 12 5

4 14 13 9 6 3 20 5 19

16 9 15

Esta definición se refiere a:

2. **Razonamiento:**

Identifica el método de factorización que no encaja con los demás:

Método de(l) :

- Aspa doble especial
- Identidades
- Sustitución de variables
- Divisores trinómicos
- Aspa simple
- Quita y pon
- Aspa doble
- Factor común
- Adición y sustracciones especiales.

Razonamiento y demostración

3. Factoriza:

$x^3 + 5x^2 - 2(2x + 1)$

Indica un factor primo.

A) $x^2 + 3$ B) $2x + 1$
C) $x^3 + 5x^2$ D) $x^2 + 6x + 2$
E) $x + 1$

4. Factoriza:

$J(m; n) = m^2(4m^2 - 5) + 1$

e indica un factor primo obtenido.

A) $m + 2$ B) $m - 2$
C) $2m - 1$ D) $m + 5$
E) $m^2 + 1$

5. Factoriza:

$H(x; y) = 54x^8 + 21x^4y^2 - 20y^4$

Indica un factor primo.

A) $6x^4 - 5x^2$ B) $9x^4 + 4y^2$
C) $x^4 + y$ D) $6x^4 + 4y^2$
E) $3x^2 + 2y$

6. Al factorizar:

$F(x; y) = (xy + 1)^2 - (x + y)^2 + 4xy$

la suma de sus factores primos es:

A) 4 B) $2x + y$
C) $2x - y$ D) $4x + 2y$
E) $2xy + 2$

7. Factoriza:

$P(x) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 3x + 4$

e indica un factor primo.

A) $x^2 + 3$ B) $x^2 + 4$
C) $x^2 + 2$ D) $x^2 + 1$
E) $x^2 + 7$

8. Cuántos factores binómicos se obtienen al factorizar:

$P(a; b; c; d) = (a + b)(a + c) - (b + d)(c + d)$?

A) Ninguno B) 2 C) 1
D) 3 E) 5

Resolución de problemas

9. Factoriza:

$2x^3 - 7x^2 - x + 2$

El término independiente de un factor primo es:

A) –2 B) –3 C) 3
D) 5 E) 1

10. Factoriza:

$F(x) = (x + y)^2 + (x - y)^2 + 4xy - 5(x + y) + 2$

Indica la suma de los términos independientes de los factores primos.

A) –3 B) –2 C) –1
D) 2 E) 3

NIVEL 2

Comunicación matemática

11. Representa gráficamente el polinomio:

$x^2 + (a + b)x + ab$;

en un cuadrado o rectángulo y según ello factorízalo.

12. Luego de factorizar el polinomio:

$B(x) = 21x^4 + 13x^3 + 85x^2 + 24x + 22$

$3x^2$ cx 11
ax^2 dx b

determina la suma de coeficientes de uno de sus factores primos:

A) 11 B) 12 C) 10
D) 5 E) 8

Razonamiento y demostración

13. Factoriza:

$P(x) = x^3 - 5x^2 + x + 10$

Indica un factor primo.

A) $x - 1$ B) $x - 2$ C) $x + 4$
D) $x - 7$ E) $x + 2$

14. Si: $a + b + c + d = 33$; $\{a; b; c; d\} \subset \mathbb{Z}$ y P(x) es factorizable por aspa simple, tal que:

$P(x) = 6x^2 + dx + 7$

3x a
bx c

Calcula: $d - 2c - b^{2a}$

A) 5 B) 3 C) 4
D) 7 E) 6

15. Factoriza:

$3x^3 - 13x^2 + 13x - 3$

Señala el producto de los términos de un factor.

A) $2x$ B) x C) $-x$
D) $-2x$ E) $3x$

16. Halla el valor numérico de un factor primo en:

$P(x) = x(c^4x - 6 - x) - 9$; para $x = -3$

A) $-2c$ B) $-2c^2$ C) $3c^4$
D) $-3c^2$ E) $4c^2$

17. Factoriza el polinomio:

$P(x; y) = x^2 - y^2 + a^2 - b^2 + 2(ax - by)$; e indica el número de factores lineales.

A) 1 B) 5 C) 2
D) 3 E) 6

18. Un factor de:

$R = x^{n+2} - ax^{n+1} + bx^{n+1} - abx^n$, es:

A) $x + b$ B) $x - b$ C) $x - c^2$
D) $x + a$ E) ax

Resolución de problemas

19. Al factorizar:

$F(x) = x^2(2x + 7)^2 - 12(2x^2 + 7x + 5) + 15$

la suma de los términos independientes de los factores primos es:

A) 0 B) 2 C) 3
D) 6 E) 12

20. Al factorizar:

$F(x) = (x^2 + 2)^2 - (2x + 1)^2$

el factor primo que se repite es:

A) $x + 1$ B) $x - 1$ C) $x + 2$
D) $x - 2$ E) $x - 3$

NIVEL 3

Comunicación matemática

21. ¿Cuánto vale $(M-N) \div 2$, si el trinomio $5Mx^{10} + 110x^5y^5 + Ny^{10}$ es un trinomio cuadrado perfecto?

A) 58 B) 19 C) 20
D) 21 E) 27

22. Del siguiente polinomio:

$P(a;b) = a^6 - 4a^3b - 4a^3c^3 + 6bc^3 + 3b^2 + 3c^6$

Verifica las proposiciones si son verdaderas (V) o falsas (F):

I. Tiene 2 factores primos.

II. Tiene 2 factores primos cúbicos.

III. La suma de coeficientes de uno de sus factores primos es $-c^3$.

A) VFV B) FVF C) VVF
D) FFV E) VVV

Razonamiento y demostración

23. Factoriza:

$M(a; b) = a^2 + 5ab + 6b^2 + a + 5b - 6$

Indica un factor primo.

A) $a + 3b + 2$ B) $a + 2b - 2$
C) $a + 3b - 2$ D) $a + b + 3$
E) $a + b - 2$

24. Indica un factor primo del polinomio:

$F(x; y) = x^3 - 3xy(x - y) + 26y^3$

A) $x + 2y$ B) $x + 4y$ C) $x - y$
D) $x + y$ E) $x - 2y$

25. Indica un factor primo del polinomio:

$P(x) = x^3 + (a - 1)x^2 - (a + 2)x - 2a$

A) $x + a$ B) $x + 2$ C) $x - 1$
D) $x + 7$ E) $2x + 1$

26. Luego de factorizar:

$M(x; y) = 12(x + y)^2 + 7(x + y) - 12$

se obtiene:

A) $(4x - 4y - 3)(3x - 3y + 4)$
B) $(4x + 4y - 3)(3x + 3y + 4)$
C) $(4x - 4y + 3)(3x + y - 4)$
D) $(3x + 4y + 3)(4x + 3y - 4)$
E) $(6x + y + 2)(2x - y - 6)$

27. Determina el número de factores primos luego de factorizar:

$P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 18(x^2 + x) + 72$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

28. Al factorizar:

$F(x) = (x^2 + 6)^2 + 3x(x^2 + 6) - 10x^2$

el factor primo cuadrático es:

A) $x^2 - 2x + 6$ B) $x^2 + 2x + 6$
C) $x^2 + 5x + 6$ D) $x^2 - 5x + 6$
E) $x^2 + 3$

Resolución de problemas

29. Factoriza:

$A = mxz + mqy + nqx + myz + mqx + nyz + nyq + nxz$

A) $(z + q)(x - y)(m + n)$
B) $(z + q)(x + y)(m + n)$
C) $(z + q)(x - y)(m + n)$
D) $(z + q)(x + y)(m - n)$
E) $(x + y)(m + n)$

30. Factoriza el polinomio:

$R(x) = x^4 + x^3 + 4x^2 - 3x + 5$

e indica la suma de los términos lineales de cada uno de los factores primos.

A) $2x$ B) $5x$ C) x
D) $8x$ E) $4x$

31. Al factorizar:

$F(x) = x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1$

¿cuántos factores primos se obtienen?

A) 2 B) 4 C) 5
D) 3 E) 1

Claves

NIVEL 1		NIVEL 2	NIVEL 3	
1.	7. D	13. B	21. A	27. D
2.	8. C	14. A	22. C	28. A
3. D	9. A	15. C	23. C	29. B
4. C	10. A	16. D	24. A	30. C
5. E	11.	17. C	25. A	31. E
6. E	12. A	18. A	26. B	
		19. D		
		20. B		

Sea $P(x) = x^4 - mx + n$ un polinomio de coeficientes enteros, tal que $P(x)$ es divisible por $(x - 2)^2$.

Determina: $m + n$

Resolución:

Si es divisible por $(x - 2)^2$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4$ es factor de $P(x)$.

Dividimos por Horner:

1	1	0	0	$-m$	n
4		4	-4		
-4			16	-16	
				48	-48
	1	4	12	$32 - m$	$n - 48$
				0	0

Como es exacta: $32 - m = 0$, $n - 48 = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} m = 32 \\ n = 48 \end{cases}$ $\therefore m + n = 80$

1. Responde verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

- $\dfrac{n^3 + 6n^2 - 9n - 14}{n + 2}$ es múltiplo de (n + 7). ( )
- Si $P(x) = 4x^3 - 2x^2 + x \Rightarrow P(-1) = 3$. ( )
- $\dfrac{2x^3 - x^2 - 7x + 6}{x^2 + x - 2}$ es una división exacta. ( )

A) VVV B) FVF C) FFV
D) VFV E) VFF

2. Determina un polinomio P(x) de grado 3 de coeficientes enteros que al dividirlo por (x + 3) (x + 1)(x – 2) se obtiene por resto 5; además, el término independiente es 6. Indica P(5).

A) 24 B) 19 C) –25
D) –19 E) 0

3. Reduce $B = \left(\dfrac{m^{-3} + n^{-3}}{m^{-3}n^{-3}}\right)^{-1}$, si $m + n = 3 \wedge mn = \dfrac{1}{2}$.

A) $\dfrac{3}{27}$ B) $\dfrac{2}{45}$ C) $\dfrac{1}{57}$
D) $\dfrac{1}{3}$ E) $\dfrac{3}{27}$

4. Determina x en:

$\sqrt[x]{3^{15+x}} = \sqrt{243}$

A) 5 B) 10 C) 3
D) 9 E) 18

5. Determina la suma de coeficientes del cociente en:

$\dfrac{x^5 - 3x^3 + 3x^2 - 1}{x - 3}$

A) 34 B) 124 C) 16
D) 94 E) 104

6. Al dividir:

$\dfrac{6x^6 + 8x^5 + x^3 + ax^2 + bx + c}{3x^3 + x^2 + 2x + 1}$

se obtiene de resto: $2x^2 + 4x - 3$

Indica: a + b + c

A) 6 B) –5 C) 10
D) 9 E) 0

7. Sean P y Q dos polinomios.

$P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + 8$

$Q(x) = ax^3 - bx^2 + cx - d$

Si: $P(x) = Q(x + 1)$

Determina: a + b + c + d

A) 34 B) –35 C) 0
D) 32 E) 18

8. Determina: GR(x) + GA(P)

Si: $P(x; y) = 5x^{m+2}y^7 + 7x^my^5$

A) m B) m + 2 C) m + 9
D) m + 11 E) m + 5

9. Si: $x + \dfrac{1}{x} = 4$

Determina: $x^5 + \dfrac{1}{x^5}$

A) 4^5 B) 4^3 C) 50
D) 100 E) 724

10. Determina el resto de la siguiente división:

$\dfrac{7x^{112} - 6x^{40} + 36x^{16} + x^6 + 4}{x^2 - 1}$

A) x + 3 B) x + 50 c) 30
D) 42 E) 25

11. Reduce: $N = \dfrac{(0,25)^{-2^{-1}} + \left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-0,5^{-1}}}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}}$

A) 2 B) 1 C) 7
D) 6 E) 9

Unidad 2




RECUERDA

Análisis infinitesimal

La aparición del análisis infinitesimal fue la culminación de un largo proceso, cuya esencia matemática interna consistió en la acumulación y asimilación teórica de los elementos del cálculo diferencial e integral y la teoría de las series. Para el desarrollo de este proceso se contaba con el Álgebra; las técnicas de cálculo; la introducción a las matemáticas variables; el método de coordenadas; las ideas infinitesimales clásicas, especialmente de Arquímedes; el problema de cuadraturas; la búsqueda de tangentes etc. Las causas que motivaron este proceso fueron, en primer término, las exigencias de la mecánica, la Astronomía y la Física. En la resolución de problemas de este género, en la búsqueda de problemas generales de resolución y en la creación del análisis infinitesimal tomaron parte muchos científicos: Kepler, Galileo, Cavalieri, Torricelli, Pascal, Walis, Roberval, Descartes, Barrow, Newton, Leibniz y Euler.

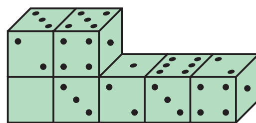
La última etapa del desarrollo del análisis infinitesimal fue el establecimiento de la relación e inversibilidad mutua entre las investigaciones diferenciales e integrales, y a partir de aquí la formación del cálculo diferencial e integral. Este último surgió como una parte independiente de las matemáticas, casi simultáneamente en dos formas diferentes: en la forma de teoría de fluxiones de Newton y bajo la forma de cálculo de diferenciales de G. W. Leibniz.

Reflexiona

- *El enfoque proactivo consiste en cambiar de adentro hacia afuera y ser distinto, y de esta manera provocar un cambio positivo en lo que está allí afuera.*
- *Somos responsables, tenemos "habilidad de respuesta", de controlar nuestras vidas y de influir poderosamente en nuestras circunstancias trabajando sobre el ser, sobre lo que somos.*
- *Lo más proactivo a nuestro alcance es ser feliz, sonreír auténticamente. La felicidad, como la desdicha, es una elección proactiva.*

¡Razona...!

En la figura, se muestra una mesa con siete dados. ¿Cuántos puntos como mínimo no son visibles?



A) 67 B) 61 C) 71 D) 68 E) 72

Aplicamos lo aprendido





TEMA 1: MCD Y MCM - FRACCIONES ALGEBRAICAS

1 Efectúa:

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-6}\cdot\frac{x^2-4}{x^2-x-2}\cdot\frac{x^2-2x-3}{x^2-4x+4}$$

A) $\frac{x-1}{x-2}$ B) $\frac{x-1}{x+2}$ C) $\frac{x+1}{x+2}$

D) $\frac{x+1}{x-2}$ E) 1

2 Reduce:

$$S=\frac{1+\frac{x+y}{x-y}}{1+\frac{x-y}{x+y}}$$

Da como respuesta la suma del numerador y el denominador.

A) x B) 2x C) y D) 2y E) x + y

3 Efectúa:

$$\frac{a^2-b^2}{ab}-\frac{ab-b^2}{ab-a^2}$$

A) b/a B) a/b C) ab

D) –ab E) 0

4 Halla a + b, si:

$$\frac{6x^2+14x+6}{x^3+3x^2+2x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{1}{x+2}$$

A) 4 B) 6 C) 7 D) 8 E) 5

5 Simplifica:

$$M=\frac{2ax^2+2x^3-3bx^2-2b^2x-3abx+3b^3}{2x^2+2cx-3bx-3bc}$$

A) $\frac{x^2-b^2}{x}$ B) $\frac{x^2-ax}{x}$ C) $\frac{x^2+ax-b^2}{x+c}$

D) $\frac{x^2+b^2}{x+a}$ E) $\frac{x^2+b^2-ax}{x-c}$

6 Reduce:

$$E=\left(\frac{1}{3x+3}+\frac{1}{2x-2}+\frac{1}{x^2-1}\right)\cdot(x-1)$$

Da como respuesta la diferencia del denominador y el numerador.

A) 2 B) x C) x – 1

D) x + 1 E) x + 3

7 El producto de 2 polinomios es: $P(x) \cdot Q(x) = (x+1)(x-3)(x+2)^2$
Calcula el MCD si el MCM $= x^3 - 7x - 6$

A) $x+2$ B) $x+1$ C) $x-3$
D) x E) $x(x+2)$

8 Efectúa:
$$M = \frac{x^3}{x-1} + \frac{x^2}{x+1} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

A) $x^2 + 2x$ B) $x - 2$ C) $x + 1$
D) $x^2 - 2$ E) $x^2 + 1$

9 Sabiendo que la fracción: $F(x; y) = \dfrac{ax^2 + bxy + 24y^2}{5x^2 + 2xy + 8y^2}$
toma un valor constante para todo valor de sus variables.
Halla ab.

A) 45 B) 60 C) 84
D) 90 E) 12

10 Determina el MCD de los siguientes polinomios:
$P = (mx + ny)^2 + (nx - my)^2$
$Q = m^3 + n^3 + mn^2 + m^2n$

A) $m^2 + n^2$ B) $m^2 + n$ C) $n + m^2$
D) $m + n$ E) $m - n$

11 Si: $Q(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$ es el MCM de los polinomios:
$P(x)$ y $F(x) = x^2 + ax + 3$. Calcula: $(a^2 + 1)$

A) 10 B) 14 C) 17
D) 26 E) 50

12 Efectúa:
$$\left(\frac{4a + ab^2}{b^2x - 4x}\right) \div \left[\frac{2b^2}{b+2} + 2 - b\right]$$

A) $\dfrac{a}{x(b-2)}$ B) $\dfrac{a}{x(b+2)}$ C) $a + b$
D) $a - b$ E) $\dfrac{a}{b}$

13 Efectúa:
$$E = \frac{1}{3x-9} + \frac{5x-3}{3x^2-27} - \frac{1}{x+3}$$

A) $\dfrac{2}{x+3}$ B) $\dfrac{2}{x-3}$ C) $\dfrac{1}{x-3}$ D) $\dfrac{5}{x}$ E) $\dfrac{1}{x+3}$

14 Si $ab = c$, calcula el valor de:
$$E = \frac{a}{ab + a + 1} + \frac{bc}{b + bc + c} + \frac{1}{a + 1 + c}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5



Claves

1. A	3. B	5. C	7. A	9. D	11. C	13. C
2. B	4. E	6. C	8. A	10. A	12. A	14. A

Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Encuentra las distintas clases de fracciones:

Propia – Impropia – Homogéneas – Heterogéneas – Equivalentes – Compleja

B	S	X	S	F	E	Q	A	C	S	E	R	A
V	P	A	E	A	P	V	J	A	Y	O	T	V
P	T	Y	E	D	E	C	E	Q	U	I	V	L
T	A	Q	F	N	X	N	L	B	V	C	A	S
Q	W	O	H	G	E	K	P	D	T	D	I	N
U	Q	X	M	G	X	G	M	G	C	J	P	N
A	J	I	O	G	E	N	O	L	O	B	O	B
S	L	M	W	Z	P	Y	C	R	K	R	R	J
K	O	E	N	N	K	B	L	M	E	M	P	Z
H	G	J	R	O	I	H	A	S	H	T	I	A
S	E	T	N	E	L	A	V	I	U	Q	E	O
R	D	F	M	D	G	Z	H	C	G	I	P	H
Z	E	A	I	P	O	R	P	M	I	C	Z	F
C	R	P	R	O	P	Z	Y	L	A	S	B	X

2. Completa la teoría de la clasificación de fracciones algebraicas:

A) Una fracción algebraica es propia cuando el grado del denominador es ______ que el grado del numerador.

B) Son fracciones homogéneas cuando tienen ______ denominador.

C) Una fracción es compleja cuando al menos uno de sus términos es una ______.

D) Una fracción de valor ______ es cuando asume el ______ valor numérico para cualquier sistema de valores asignados a sus ______.

Razonamiento y demostración

3. Si el producto de dos expresiones es:
$(x+1)^2(x+2)(x+5)$ y su MCD es $(x+2)$.
El MCM de las expresiones es:

A) x^3+7x^2

B) $11x+5$

C) $x^3+7x^2+11x+5$

D) $x^2+11x+5$

E) $x^3+7x^2-11x-5$

4. Simplifica:

$$R=\frac{x^5-px^4-p^4x+p^5}{x^4-px^3-p^2x^2+p^3x}$$

A) $\frac{x}{p}$ B) $\frac{x^2+p^2}{3x}$ C) $\frac{x^2-p^2}{x}$

D) $\frac{x^2+p^2}{x}$ E) $\frac{x+p}{x}$

5. Simplifica:

$$F=\frac{x^3+2x^2+2x+1}{x^3-x^2-x-2}$$

A) $\frac{x-2}{x+1}$ B) $\frac{x+7}{x^2-1}$ C) $\frac{5}{1-x^2}$

D) $\frac{x+1}{x-2}$ E) $\frac{x-2}{x^2+1}$

6. Reduce:

$$K=\left[\frac{a(a+c)+b(c-b)}{c(a+c)+b(a-b)}\right]:\frac{1}{b+c}$$

A) 1 B) a – b C) a + b

D) a + c E) b + c

7. Calcula:

$$R=x-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-x}}}$$

A) 1 B) x C) –x

D) 0 E) 2x

8. Simplifica: $M=\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{x-1}}}$

A) $\frac{x-1}{x}$ B) $\frac{x}{x+1}$ C) $\frac{x}{x-1}$

D) $\frac{x+1}{x}$ E) 1

Resolución de problemas

9. Si el MCD de:

$P(x)=x^3+ax^2+(a+b)x+b$

$Q(x)=x^3+cx^2+(c+d)x+d$

Es un cuadrado perfecto, entonces podemos afirmar que:

A) a + b = c + d B) a + c = b + d C) a + d = b + c

D) a + b + c + d = 0 E) a + 2b = c + 2d

10. Si la fracción:

$$F(x;y) = \frac{ax^2 + cxy + ey^2}{bx^2 + dxy + fy^2}$$

Toma un valor constante k^2 para todo valor de x e y. Halla $\sqrt{acf}$,

sabiendo que: $bde = \frac{R^2}{k^2}$; $(R > 0)$

A) 1 B) $\frac{R}{k}$ C) $\frac{k}{R}$
D) k E) R

NIVEL 2

Comunicación matemática

11. Marca verdadero (V) o falso (F), según corresponda:

( ) Una fracción impropia es cuando el grado del denominador es menor o igual que el grado del numerador.

( ) El MCM se calcula primero si factorizamos las expresiones; luego se tomará solo los factores comunes con su mayor exponente.

( ) En toda fracción si se altera cualquier par de sus signos, tendremos como resultado otra fracción equivalente.

( ) El MCD de dos o más polinomios es otro polinomio de mayor grado posible que divide exactamente a cada uno de ellos.

12. Indica el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

( ) Si:
$A(x) = x^2 + x - 2$
$B(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$, entonces:
$MCM(A(x), B(x)) = (x - 1)(x + 2)(x^2 + 2)$

( ) Si:
$A(x) = x^2 - 3x - 10$
$B(x) = x^2 + 9x + 20$
$MCM(A(x), B(x)) = x + 5$

( ) Si:
$A(x) = x^2 + 6x - 27$
$B(x) = x^2 + 2x - 63$
$MCM(A(x), B(x)) = x + 9$

A) FFF B) VFV C) VFF
D) VVF E) VVV

Razonamiento y demostración

13. Sabemos que el MCD de los polinomios:
$A(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + m$
$B(x) = x^3 + x^2 + n$
es $x^2 - x + 2$
Calcula: mn

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 16

14. Calcular: $M = x^2 + y^2 + z^2$

Si: $x = \frac{a+b}{a-b}$; $y = \frac{b+c}{b-c}$; $z = \frac{c+a}{c-a}$

$$\frac{ab}{(a-b)^2} + \frac{bc}{(b-c)^2} + \frac{ac}{(a-c)^2} = 3$$

A) 15 B) 13 C) 16 D) 14 E) 17

15. Calcula la suma de:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + ... + \frac{1}{n^2 + n}$$

A) 1 B) $\frac{1}{12}$ C) n
D) n + 1 E) $\frac{n}{n+1}$

16. Si la fracción:

$$F(x;y) = \frac{mx^2 + 18xy + 24y^2}{5x^2 + 3xy + ny^2}$$

es independiente de x e y. Calcula el valor de m + n.

A) 12 B) 8 C) 34
D) 6 E) –12

17. Calcula:

$$\left[a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{\vdots_{\infty}}}}}\right] \div \left[b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{\vdots_{\infty}}}}}\right]$$

A) a B) $\frac{a}{b}$ C) b
D) 2a E) 3a

18. Calcula:

$F^2 + 1$, si:

$$F = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\vdots}}}}$$

A) 11 B) 8 C) 7 D) 5 E) 10

19. Calcula:

$$B = \frac{1}{a-5} - \frac{2}{a^2-8a+15} - \frac{1}{a^2-5a+6}$$

A) $\frac{1}{a+2}$ B) $a+2$ C) $\frac{1}{a-2}$
D) $a-2$ E) $a+1$

20. Simplifica:

$$M = \frac{ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)}{ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)}$$

Indica la suma de los términos del resultado.

A) 2by B) 2ax C) 0
D) –2ax E) –2by

Resolución de problemas

21. Si uno de los factores del MCD de H(x) y W(x) tiene la forma: $ax^7 + bx + c$

$H(x) = x^8 - 5x^7 + 9x^2 - 46x + 5$

$W(x) = x^{13} + 12x^7 - x^6 + 27x - 3$

Determina: $R = b^{(a-c)^c}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

22. De la siguiente fracción: $\frac{x^4+(t+2)x^3+rx^2+28x+21}{x^4+tx^3+wx^2+10x+7}$

Hay un factor en común tanto en el numerador como en el denominador de la siguiente forma: $x^3 + Ax + B$.

Determina A^B asi como la suma del numerador y denominador de la fracción simplificada.

A) 3; x + 2 B) 2 ; x + 1 C) 10; 5(x + 3)
D) 1; x + 1 E) 9; 2(x + 2)

NIVEL 3

Comunicación matemática

23. Lenguaje

Sitúa correctamente los títulos de los enunciados en forma cruzada junto al número que corresponde.

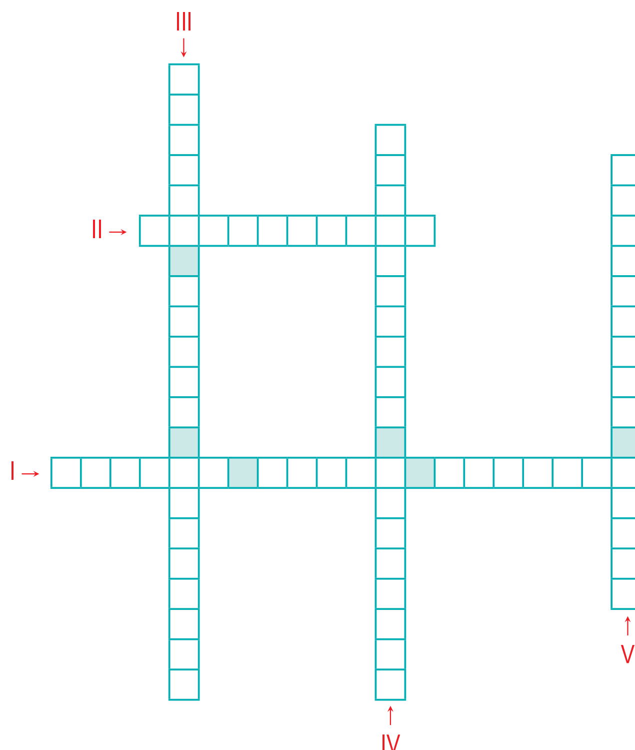
I. Es aquel polinomio de mayor grado posible que divide exactamente a dos o más polinomios.

II. Son aquellas que tienen igual denominador: fracciones...

III. Es aquel polinomio de menor grado posible que sea divisible por cada uno de los polinomios.

IV: Es el cociente indicado de dos expresiones algebraicas racionales enteras llamadas numerador (dividendo) y denominador (divisor) donde este último es al menos de primer grado.

V. Es cuando asume el mismo valor numérico para cualquier sistema de valores asignados a sus variables.



24. Determina qué relación es la correcta entre P y Q si:

$$P = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} \quad y \quad Q = \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$$

A) $P > Q$ B) $\frac{P}{Q} < \frac{4}{5}$ C) $Q = 7P$
D) $\frac{3}{P} + \frac{7}{Q} > 14$ E) $\sqrt[P]{Q} = 1$

Razonamiento y demostración

25. Si el MCD de los polinomios:

$P(x) = x^4 - 9x^2 + mx + n$

$F(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + px + q$

es: $(x-2)(x-3)$, halla el MCM de dichos polinomios.

A) $(x-2)(x-3)(x^2-2x+4)(x^2+1)$

B) $(x-2)^2(x-3)^2(x+4)^2(x-5)$

C) $(x-2)(x-3)(x^2+5x-10)(x^2-7x-22)$

D) $(x^2+5x-10)(x-2)^2(x-3)^2$

E) $(x-2)(x-3)(x^2+5x+10)(x^2+7x+22)$

26. Si a; b y c $\in \mathbb{R}$, tal que:

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0$$

Calcula:

$$M = \frac{a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{abc(a+b+c)}$$

A) 1 B) –1 C) 2 D) 7 E) 3

27. Si: $\dfrac{x^2+y^2}{x+y}+\dfrac{y^2+z^2}{y+z}+\dfrac{z^2+x^2}{z+x}=xyz$

Halla:

$$R=\frac{y}{xz(x+y)}+\frac{z}{xy(y+z)}+\frac{x}{yz(z+x)}$$

A) 1/2 B) 2 C) 1
D) xyz E) 4

28. Si: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$; reduce la siguiente expresión:

$$E=\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}-\frac{ab}{a+b}-\frac{cd}{c+d}$$

A) 0 B) 1 C) –1
D) $\dfrac{ab}{cd}$ E) $\dfrac{ac}{bd}$

29. Reduce:

$$\frac{\dfrac{1}{a-x}+\dfrac{x}{(a-x)^2}+\dfrac{x^3}{(a-x)^3}+\dots+\dfrac{x^{2n-1}}{(a-x)^{2n}}}{\dfrac{1}{a-x}-\dfrac{x}{(a-x)^2}+\dfrac{x^2}{(a-x)^3}-\dots-\dfrac{x^{2n-1}}{(a-x)^{2n}}}$$

A) $\dfrac{a}{2x-a}$ B) $\dfrac{a}{3x-a}$ C) $\dfrac{a}{a-2x}$
D) $\dfrac{a}{a-x}$ E) $\dfrac{x}{a-x}$

30. Al simplificar:

$$E=\frac{a^2-2ax+x^2}{2(a^2-x^2)}-\frac{2ax(a+x)}{(a-x)(a^2+2ax+x^2)}+\frac{a^2-x^2}{2(x-a)^2}$$

da el denominador:

A) 2a + x B) a – x C) a + x
D) 2a – x E) x – a

31. Si: xy + yz + zx = 3xyz = 1

Halla:

$$A=\frac{y(1+x^2)}{(1-xy)(1-xz)}+\frac{z(1+y^2)}{(1-yz)(1-xy)}+\frac{x(1+z^2)}{(1-zx)(1-yz)}$$

A) 1 B) 2x C) 3
D) xyz E) $\dfrac{1}{9}$

32. Si: a + b + c = 0, halla: $\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^4+b^4+c^4}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 8

33. Calcula (3B – 2A), si:

$$\frac{3x+4}{x^2+3x+2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$$

A) 5 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

Resolución de problemas

34. Si:

$$\frac{(a^2+b^2)}{ab}+\frac{(b^2+c^2)}{bc}+\frac{(a^2+c^2)}{ac}=-2$$

Calcula:

$$P=\frac{(a+b+c)^6-(a^6+b^6+c^6)}{(ab)^3+(bc)^3+(ac)^3}$$

A) 1 B) 2 C) 4
D) 8 E) 16

35. Si al evaluar la fracción:

$$F(x)=\frac{x^3+bx^2-abx-a^3}{x^3+3ax^2-4a^2x+b}$$

para x = a; se obtiene la forma $\dfrac{0}{0}$. Entonces, después de simplificarla, se obtendrá como verdadero valor:

A) $\dfrac{1}{2}$ B) 1 C) $\dfrac{3}{5}$
D) $\dfrac{2}{3}$ E) $\dfrac{2}{5}$

36. Calcula el producto de las fracciones que se obtiene a partir de:

$$\frac{6x^2-2x-2}{x^3-x}$$

A) $\dfrac{3}{x}$ B) $\dfrac{5}{x^2-1}$ C) $\dfrac{6}{x^2-1}$
D) $\dfrac{6}{x(x^2-1)}$ E) $\dfrac{1}{(2x-1)x}$

Claves

NIVEL 1
1.
2.
3. C
4. D
5. D
6. C
7. D
8. D
9. C
10. E

NIVEL 2
11.
12. C
13. D
14. A
15. E
16. C
17. B
18. A
19. C
20. B
21. C
22. E

NIVEL 3
23.
24. D
25. E
26. C
27. A
28. A
29. C
30. C
31. C
32. B
33. D
34. B
35. C
36. D

Aplicamos lo aprendido



TEMA 2: POTENCIACIÓN

1 Halla: m, si: $5C_5^m = mC_3^{m-1}$

A) 5 B) 7 C) 9
D) 8 E) 6

2 Halla el lugar del término que contiene como parte variable a x^{29} en: $F(x) = (2x^2 + \frac{3}{x})^{22}$

A) Primer término B) Segundo término
C) Cuarto término D) Sexto término
E) Sétimo término

3 Halla el noveno término de la expansión de: $A = (2x^5 + y^3)^{11}$

A) $x^{15}y^{24}$ B) $1320x^{15}y^{24}$ C) $132x^{15}y^{24}$
D) $100x^{15}y^{24}$ E) $130x^{15}y^{20}$

4 Halla n, si el tercer término del desarrollo de:
$\left(x + \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^n$ es $5x^3y^2$.

A) 5 B) 2 C) 1
D) 7 E) 8

5 Calcula el coeficiente del término del desarrollo del binomio $(1 + x)^{20}$ que es el doble del coeficiente del término anterior.

A) 77 200 B) 77 520 C) 77 500
D) 77 025 E) 77 620

6 Halla el término independiente del desarrollo de:
$\left(x^2 - \frac{1}{x^2\sqrt[3]{x}}\right)^{13}$

A) 1717 B) 1718 C) 1720
D) 1716 E) 1719

7 Determina el coeficiente del término independiente de x en el desarrollo de la potencia: $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^9$

A) 67 B) 90 C) 84
D) 76 E) 48

8 Halla (n + k) si se sabe que el cuarto término del desarrollo de $(x+2)^n$ es $80x^k$.

A) 4 B) 5 C) 8
D) 10 E) 7

9 Calcular el coeficiente del término del desarrollo de $(1+x)^{17}$ que es igual al coeficiente del término anterior.

A) 24 310 B) 16 743 C) 10 240
D) 18 420 E) 14 14

10 Halla el valor de **k** de tal manera que los términos de lugares k^2+8 y 6k del desarrollo de: $P(x;y)=(x+y)^{193}$ equidisten de los extremos.

A) 18 B) 11 C) 12
D) 10 E) 19

11 Calcula el término independiente en el desarrollo de: $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^9$

A) 83 B) 82 C) 84 D) 12 E) 80

12 Indica el término cuadrático en el desarrollo de: $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$

A) $C_3^7x^2$ B) $C_3^8x^2$ C) $C_4^8x^2$
D) $C_2^8x^2$ E) $C_7^8x^2$

13 Un término en el desarrollo de $(x^2-5y^7)^n$ tiene como parte literal a x^6y^{35}. Halla el coeficiente del segundo término.

A) 40 B) −42 C) 8
D) −40 E) 28

14 Halla el coeficiente del término independiente de x en el desarrollo de $P(x)=(x^8-x^{-4})^{12}$

A) 495 B) 200 C) 195
D) 250 E) 180



Claves

1. D	3. B	5. B	7. C	9. A	11. C	13. D
2. D	4. A	6. D	8. E	10. B	12. B	14. A

Practiquemos

NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Encuentra los diferentes tipos de palabras en la siguiente sopa de letras.
Semifactorial – Triángulo – Pascal – Binomio – Newton Coeficiente – Binomial

A	F	P	G	T	F	S	A	U	G	Q	V	S	W
B	E	X	F	O	W	B	L	H	T	O	E	O	P
L	D	C	L	V	Z	U	A	J	R	M	I	Y	K
Q	W	R	J	C	X	D	C	O	I	H	O	S	U
E	N	L	Q	E	O	M	S	F	A	G	I	D	D
M	I	A	E	T	A	V	A	R	N	W	M	R	T
Y	O	I	H	P	U	C	P	I	G	F	O	F	R
P	X	M	Y	E	T	C	G	Z	U	Z	N	Q	X
Z	P	O	E	O	H	B	B	Q	L	N	I	H	Y
J	I	N	R	J	L	T	A	D	O	K	B	P	S
B	N	I	D	G	C	K	Y	K	Z	C	L	I	A
S	A	B	L	S	M	L	N	O	T	W	E	N	T
L	R	C	E	T	N	E	I	C	I	F	E	O	C
X	M	H	V	T	N	E	A	J	N	M	O	U	K

2. Memoria

Lee el texto por 2 minutos, tápalo y completa las palabras, que faltan en el texto más abajo:

Del desarrollo de: $(x+a)^n$

A) El número de términos del desarrollo, es el exponente del binomio aumentado en uno.
Es decir:

n.º términos $= n + 1$

B) Si el binomio es homogéneo, el desarrollo será homogéneo del mismo grado.

C) Si los coeficientes del binomio son iguales, los coeficientes de los términos equivalentes de los extremos son iguales.

Del desarrollo de:

A) El __________________ del desarrollo, es el __________
__________________ aumentado en ______.
Es decir: [   ]

B) Si el binomio es __________________, el desarrollo será __________________ del __________________.

C) Si los __________________________ son __________,
los ______________ de los términos ______________ de
los ______________________________.

Razonamiento y demostración

3. Calcula: $M = \left(\dfrac{83!}{81! + 82!}\right)\left(\dfrac{40! + 41!}{42!}\right)$

A) 2 B) 4 C) 8 D) 6 E) 9

4. El término central en el desarrollo de: $P(x) = \left(ax - \dfrac{1}{x}\right)^6$ es $\dfrac{5}{2}$.
De acuerdo a esta condición, halla **a**.

A) $\dfrac{1}{64}$ B) 0 C) 1 D) $-\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{1}{32}$

5. Calcula **n**, si: $5C_5^n = nC_3^{n-1}$

A) 7 B) 6 C) 8 D) 11 E) 12

6. Halla a, si: $40C_a^{18} = 51C_a^{16}$

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 5

7. Calcula **a** de modo que en el desarrollo de $\left(ax^3 + \dfrac{2y}{x^2}\right)^4$ un término sea 24xn yn.

A) 1 B) 8 C) 2 D) –1 E) A ∧ D

8. Halla el coeficiente del término central en el desarrollo del binomio: $\left[x^2 + \dfrac{1}{x}\right]^{12}$.

A) 650 B) 924 C) 824 D) 850 E) 950

Resolución de problemas

9. Si en el desarrollo de: $B(x) = \left(3x^3 + \dfrac{y^2}{x}\right)^n$

existe un término cuyos exponentes de x e y son, respectivamente, 5 y 8. Hallar el número de términos del desarrollo.

A) 8 B) 7 C) 9 D) 6 E) 10

10. Determina **a** para que al reducir: $P(x) = (x + 1)^8 - (x^2 + a)^4 - 8x^7$ se obtenga un polinomio de quinto grado.

A) 7 B) 6 C) 5 D) 1 E) 15

NIVEL 2

Comunicación matemática

11. El manuscrito misterioso

A continuación se ha escrito un concepto en clave. ¡Tienes que descifrarlo! Ten en cuenta que cada casilla tiene un número que representa a una letra del alfabeto.
1 = A; 2 = B no considerar (Ñ, LI, CH).

5
14 19 19 22 16 1
15 20 5 12 19 3 5 3 5 20
5 5 1 18 12 15 5
21 2 15 9 5
5 16 5 5 14 21 1
4 4 12 1 21 1 5
4 19 5 13 9 15 5
21 1 6 1 5 5 1 14
5 13 9 1 1 1
6 1 9 9 20 5

12. Dado el binomio: $(m+n)^{10}$
Cuántas de las proposiciones son correctas:

( ) El número de términos es 11.

( ) La suma de coeficientes es 1025.

( ) El lugar del término central es $252m^6n^6$.

( ) El t_7 es $210m^4n^6$.

A) 0 B) 3 C) 4
D) 1 E) 2

Razonamiento y demostración

13. Calcula:

$$H = \sqrt[\sqrt{1!+2!+3!}]{\frac{25!}{25!+26!+27!}}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{1}{5}$

14. Resuelve: $\binom{15}{x^2} = \binom{15}{2x}$

A) {–6; 2; 4} B) {–6; 4; 2; 0}
C) {0; 2; –6} D) {0; 2; 3}
E) {0; –6; 4}

15. Calcula la suma:

$$C_0^{10}C_5^{15} + C_1^{10}C_6^{15} + C_2^{10}C_7^{15} + \cdots C_{10}^{10}C_{15}^{15}$$

A) C_{20}^{25} B) C_{10}^{20} C) C_{10}^{15}
D) C_{15}^{20} E) C_{15}^{25}

16. Calcula:

$$E = C_0^nC_p^m + C_1^nC_{p-1}^m + C_2^nC_{p-2}^m + \ldots + C_p^nC_0^m$$

A) C_p^{mn} B) C_p^{m+n} C) C_{n+p}^{m+n}
D) C_{2p}^{m+n} E) C_{2p}^{mn}

17. Halla el término independiente de x en el desarrollo de:

$$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^9$$

A) 80 B) 6 C) 12
D) 82 E) 84

18. Calcula el lugar del término que contiene a x^2 en el desarrollo de:

$$P(x) = \left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{14}$$

A) 9 B) 14 C) 12
D) 10 E) 11

Resolución de problemas

19. Determina el coeficiente del término del desarrollo de: $(a + 4b + c)^n(a - 2b + c)^n$ en el cual el grado de $(a + b + c)$ excede en 14 unidades al lugar que ocupa y este es un tercio del valor de **n**.

A) 200(13) B) $-220(3^6)$ C) $210(3^2)$
D) 230 E) $110(3^3)$

20. El valor de **x** es muy pequeño, de modo que su cuadrado y demás potencias superiores pueden omitirse. Entonces el valor de:

$M = \frac{\sqrt{x+9}}{x+1}$ se puede escribir:

A) $3 - \frac{17}{6}x$ B) $3x - \frac{5}{9}$ C) $17x - 9$
D) $51x + 9$ E) $x - 1$

NIVEL 3

Comunicación matemática

21. De las relaciones presentadas, veifica la verdad o falsedad, según corresponda:

I. El desarrollo de $(a^3+b^2)^{10}$ presenta grado de homogeneidad 10.

II. $(a+b)! = a! + b!$; se cumple si y solo si: "a" y "b" son pares positivos.

III. $x! = m$; $y! = n$, entonces: $x! - y! = mn$

A) VFF B) FVF C) VVF
D) FFF E) FFV

Razonamiento y demostración

22. Calcula el valor de **n** en:

$$\frac{(n+1)! \times n!}{(n+1)! - n!} = 99(n-2)!$$

A) 11 B) 10 C) 12
D) 20 E) 15

23. Halla el término central en el desarrollo de:

$$\left(\frac{4}{x} + \frac{x}{8}\right)^{12}$$

A) $\frac{132}{7}$ B) $\frac{157}{8}$ C) $\frac{231}{16}$
D) $\frac{63}{4}$ E) $\frac{197}{16}$

24. Resuelve el sistema: $\begin{cases} C_{y+1}^x = C_{y-1}^x \\ C_y^x = \frac{21}{10}C_{y-2}^x \end{cases}$

A) $x = 4 \wedge y = 10$ B) $x = 5 \wedge y = 10$
C) $x = 10 \wedge y = 8$ D) $x = 10 \wedge y = 5$
E) $x = 4 \wedge y = 5$

25. En la expansión de $(1 + x)^{40}$ los coeficientes de los términos de lugares $(2r + 1)$ y $(r + 2)$ son iguales. Halla **r** si es mayor que 2.

A) 13 B) 15 C) 12
D) 14 E) 10

26. Halla el término independiente en la expansión de:

$$f(x) = \left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^6$$

A) 20 B) –10 C) –20
D) 10 E) 40

Resolución de problemas

27. Determina el valor de x, si el tercer y sexto término de $\left(3x + \frac{2}{3}\right)^7$ suman cero.

A) –2/9 B) 4/3 C) 4
D) 3/5 E) 3

28. En el desarrollo de: $\left(6 + \sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}}\right)^4$ se observa que existen dos términos racionales fraccionarios. Determina el cociente de ellos.

A) $\frac{9x}{28}$ B) $\frac{28}{9}$ C) $\frac{9}{8x}$
D) $\frac{28x}{9}$ E) $\frac{9}{28}$

29. Halla x en: $\left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^x$ si en el desarrollo del binomio la relación entre el séptimo término contado desde el principio y el séptimo contado desde el final es: $\frac{1}{6}$

A) 2 B) 7 C) 3
D) 9 E) 6

Claves

NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3
1.	**11.**	**21.** D
2.	**12.** E	**22.** B
3. A	**13.** D	**23.** C
4. D	**14.** D	**24.** D
5. C	**15.** E	**25.** A
6. C	**16.** B	**26.** C
7. E	**17.** E	**27.** A
8. B	**18.** A	**28.** D
9. A	**19.** B	**29.** D
10. A	**20.** A	

Aplicamos lo aprendido



TEMA 3: RADICACIÓN - RACIONALIZACIÓN

1 Efectúa: $S = \frac{8}{\sqrt[3]{2}} - \frac{9\sqrt[3]{4}}{3}$

A) $\sqrt[3]{2}$ B) $\sqrt[3]{3}$ C) $\sqrt[3]{6}$
D) $\sqrt[3]{4}$ E) $\sqrt[3]{5}$

2 Efectúa: $A = \frac{18}{\sqrt[5]{2}} - \frac{24}{3}\sqrt[5]{16}$

A) $\sqrt[5]{16}$ B) $\sqrt[5]{8}$ C) $2\sqrt[5]{8}$
D) 0 E) 1

3 Evalúa la expresión $(a+1)^{-1} + (b+1)^{-1}$ para:
$a = (2+\sqrt{3})^{-1}$ y $b = (2-\sqrt{3})^{-1}$

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\sqrt{2}+1$
D) $\sqrt{3}+1$ E) $\sqrt{3}-1$

4 La expresión: $\frac{n^2}{\sqrt{m^2+n^2}+m}$ es equivalente a:

A) $\sqrt{m}+\sqrt{n}$ B) $\sqrt{mn}+m$
C) $\sqrt{m^2+n^2}+n$ D) $\sqrt{m^2+n^2}-m$
E) $n-\sqrt{m^2-n^2}$

5 Señala el denominador racionalizado: $\frac{12}{\sqrt{14}+\sqrt{21}+\sqrt{35}}$

A) 1 B) 2 C) 7
D) 4 E) 14

6 Halla el valor de **a** en: $\frac{\sqrt{17+2\sqrt{72}}}{\sqrt{3}+\sqrt{8}} + 7 = \sqrt{a+2\sqrt{128}}$

A) 70 B) 60 C) 42
D) 66 E) 75

7 Transforma a radicales simples: $\sqrt[4]{17+\sqrt{288}}$

A) $\sqrt{2}+1$ B) $\sqrt{2}+2$ C) $\sqrt{3}+1$
D) $\sqrt{3}+2$ E) $\sqrt{2}+3$

8 Siendo $R=\dfrac{7}{\sqrt{15}-\sqrt{8}}$, calcula: $T=[(R-\sqrt{15})^2+1]^{0,5}$

A) 3 B) 2 C) 1
D) 8 E) 15

9 Efectúa: $N=\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{17-12\sqrt{2}}-\sqrt{19+\sqrt{72}}$

A) 3 B) 1 C) 0
D) -1 E) -3

10 Indica el valor de uno de los radicales simples de:

$$\sqrt{1+2+...+6+4\sqrt{17}}$$

A) $\sqrt{23}$ B) $\sqrt{17}$ C) 1
D) 3 E) $\sqrt{12}$

11 Determina uno de los radicales simples, luego de transformar:
$\sqrt{2x-1-2\sqrt{x^2-x-6}}\,;x>3$

A) $\sqrt{x+1}$ B) $\sqrt{x+2}$ C) $\sqrt{x-3}$
D) Más de una es correcta E) $\sqrt{x-2}$

12 Transforma $\sqrt{30+\sqrt{704}}$ en suma de radicales simples.

A) $\sqrt{8}+\sqrt{21}$ B) $\sqrt{22}+\sqrt{8}$ C) $\sqrt{14}+\sqrt{5}$
D) $\sqrt{11}+\sqrt{19}$ E) $\sqrt{10}+\sqrt{20}$

13 Efectúa: $\sqrt{5-\sqrt{7}}\,.\sqrt{3+\sqrt{7}}-\sqrt{7}$

A) $-\sqrt{7}$ B) -1 C) $\sqrt{7}$
D) 1 E) $\sqrt{7}+1$

14 Efectúa: $\sqrt{7-2\sqrt{10}}-\sqrt{8-2\sqrt{15}}+\sqrt{2}$

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{4}$
D) $\sqrt{5}$ E) 1



Claves

1. D	3. B	5. C	7. A	9. E	11. D	13. D
2. A	4. D	6. D	8. A	10. B	12. B	14. B

Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Percepción - Espacio

Los nombres de tres conceptos se han cortado en franjas horizontales y con algunas de ellas se han formado la ilustración inferior.

¿A qué conceptos se refieren?

Rptas.:

____

____

____

2. Memoriza los siguientes conceptos por 3 minutos, luego de esto sin mirarlo compara y verifica qué alternativa coincide exactamente con la memorizada.

La racionalización es la operación mediante la cual se transforma una expresión cuyo denominador es irracional en otra equivalente, pero con denominador racional. Para esto se multiplican ambos términos de la fracción por una expresión llamada factor racionalizante (FR).

El factor racionalizante (FR) es la expresión irracional que multiplicada por el denominador irracional lo convierte en una expresión racional.

A

La racionalización es la operación mediante la cual se transforma una expresión cuyo denominador es racional en otra equivalente, pero con denominador racional. Para esto se dividen ambos términos de la fracción por una expresión llamada factor racionalizante (FR).

El factor racionalizante (FR) es la expresión irracional que multiplicada por el denominador irracional lo convierte en una expresión racional.

B

La racionalización es la operación mediante la cual se transforma una expresión cuyo denominador es irracional en otra equivalente, pero con denominador racional. Para esto se multiplican ambos términos de la fracción por una expresión llamada factor racionalizante (FR).

El factor racionalizante (FR) es la expresión irracional que multiplicada por el denominador irracional lo convierte en una expresión racional.

C

La racionalización es la operación mediante la cual se transforma una expresión cuyo denominador es irracional en otra equivalente, pero con denominador racional. Para esto se multiplican ambos términos de la fracción por una expresión llamada factor racionalizante (FR).

El factor racionalizante (FR) es la expresión racional que multiplicada por el denominador racional lo convierte en una expresión irracional.

Razonamiento y demostración

3. Efectúa: $\frac{12}{\sqrt[3]{3}} + \frac{18}{6}\sqrt[3]{9}$

A) $3\sqrt{3}$ B) $\sqrt{6}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $2\sqrt[3]{9}$ E) $7\sqrt[3]{9}$

4. Efectúa: $A = \frac{8}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}$

A) $5\sqrt{2}$ B) $12\sqrt{2}$ C) $6\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{3}$

5. Halla el valor de la siguiente expresión: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\right)$

A) $\sqrt{2}$ B) $-\sqrt{2}$ C) 1 D) $-\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}$

6. Efectúa: $S = \left[\sqrt{12 - \sqrt{140}} + \sqrt{5}\right] . \sqrt{7}$

A) 5 B) 8 C) 4 D) 7 E) $\sqrt{5}$

7. Calcula: $P = \sqrt{12 + 2\sqrt{27}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{12}}$

A) 4 B) 6 C) $2\sqrt{3}$ D) $\sqrt{3}$ E) 5

8. Calcula: $N = \sqrt{18 + 2\sqrt{32}} + \sqrt{11 - 2\sqrt{18}}$

A) 8 B) 9 C) 7 D) 10 E) 12

9. Efectúa: $A = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + 1$

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 0 E) 2

Resolución de problemas

10. Calcula el valor de: $\sqrt[4]{\frac{\alpha}{\theta}}$. A partir de: $\sqrt{11\sqrt{2} - 12} = \sqrt[4]{\alpha} - \sqrt[4]{\theta}$

$\alpha > \theta \ \wedge \{\alpha; \theta\} \subset \mathbb{N}$

A) 1 B) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

11. Luego de racionalizar: $Z = \frac{3}{\sqrt{64 + 8\sqrt[4]{3969}} - \sqrt[4]{233 + 88\sqrt[4]{49}}}$

Obenemos una expresión similar a: $\frac{1}{3}(a - \sqrt{b})$

Luego con los valores calculados para "a" y "b" determina: a^{b-a}

A) 16 B) 32 C) 64 D) 128 E) 1024

NIVEL 2

Comunicación matemática

12. Si los denominadores se presentan como las expresiones, irracionales indicadas, coloca en los recuadros lo que corresponda según su factor racionalizante (FR) de acuerdo a las proposiciones:

I. Si: $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$: $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}$

II. Si: $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}$

III. Si: $n \in \mathbb{Z}^+$: n: impar: $\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$

IV. Si: $n \in \mathbb{Z}^+$, n: par: $\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$

A) ☐ $FR= \sqrt[n]{x^{n-1}} - \sqrt[n]{x^{n-2}}\sqrt[n]{y} + ... - \sqrt[n]{y^{n-1}}$

B) ☐ $FR= \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}$

C) ☐ $FR= \sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}}\sqrt[n]{y} + ... + \sqrt[n]{y^{n-1}}$

D) ☐ $FR= \sqrt[n]{x^{n-1}} - \sqrt[n]{x^{n-2}}\sqrt[n]{y} + ... + \sqrt[n]{y^{n-1}}$

13. Memoria

De las consideraciones mencionadas, luego de leerlas durante 1 minuto tapa las descripciones y responde con SÍ o NO en las preguntas planteadas.

I. La radicación es la operación que tiene como objetivo calcular una expresión llamada raíz, tal que elevada al índice resulte otra expresión llamada radicando o cantidad subradical.

II. La racionalización es el proceso que consiste en transformar el denominador irracional, de una fracción, en otro que sea racional.

III. Los radicales homogéneos se caracterizan por tener el mismo índice y los radicales semejantes que además de tener el mismo índice tienen la misma expresión subradical.

IV. El factor racionalizante (FR) es aquella expresión irracional que al multiplicarla por una expresión irracional dada, la transforma en racional.

A) ¿Los radicales homogéneos y semejantes tienen algo en común, es decir el poseer la misma expresión subradical?

____

B) ¿Para racionalizar una fracción bastará con multiplicar sus términos por el factor racionalizante del denominador?

____

C) ¿La racionalización es el proceso de transformación de un número irracional a uno racional?

____

Razonamiento y demostración

14. Efectúa: $E = \dfrac{7}{\sqrt{5}} - \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $3\sqrt{5}$ D) 0 E) 1

15. Efectúa: $L = \dfrac{17}{\sqrt{3}} - \dfrac{8}{\sqrt{3}} + \dfrac{12}{\sqrt{3}}$

A) $6\sqrt{3}$ B) $7\sqrt{3}$ C) $8\sqrt{3}$ D) 0 E) $-8\sqrt{3}$

16. Racionaliza: $P = \dfrac{m-49}{m+4\sqrt{m}-21}$

El denominador racionalizado es:

A) $m-9$ B) $m+7$ C) $m-7$ D) $m+9$ E) $m+3$

17. Efectúa: $K = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2} + \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) $4\sqrt{2}-1$

18. Racionaliza: $M = \dfrac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{8}}$, e indica el denominador.

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

19. Halla el equivalente de:

$$T = \sqrt[(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})]{17-2\sqrt{72}}$$

A) $\sqrt{3}-1$ B) $\sqrt{2}-1$ C) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$
D) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ E) $\sqrt{6}-1$

20. Luego de efectuar: $E = \sqrt[3]{2}\,.\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}\,.\sqrt[6]{16-2\sqrt{48}}$
se obtiene:

A) 2 B) 4 C) 6 D) $\sqrt[3]{2}$ E) $2\sqrt[3]{2}$

Resolución de problemas

21. Sean: $\dfrac{1-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$ y $\dfrac{1-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}$

El resultado de dividir la suma de la primera fracción con su respectiva inversa, entre la suma de la segunda fracción con su respectiva inversa es una expresión que toma la siguiente forma:

$$K(12\sqrt{\alpha} - 25\sqrt{\beta})$$

Determina:

$$E = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{10\frac{\beta}{\alpha}}$$

A) 24 B) 25 C) 26 D) 27 E) 28

22. Con los radicales dobles:

$$A = \sqrt{13-2\sqrt{ab}}$$
$$B = \sqrt{10-\sqrt{84}}$$
$$C = \sqrt{9+\sqrt{72}}$$

Se plantea que:

La suma del cuádruple de la inversa de B y el triple de la inversa de C es igual a la inversa de A.

Determina: a^b

A) 1 B) 6 C) 10
D) 16 E) –16

NIVEL 3

Comunicación matemática

23. Se establece que:

$$P = \frac{3+2\sqrt{6}+\sqrt{20}}{\sqrt{9+\sqrt{60}}}$$

Entonces podemos afirmar que:

A) $P > 3$ B) P es natural C) $P^2 < 2$
D) $P^3 = 5$ E) $P^4 = 25$

24. Marca la proposición incorrecta:

A) En la racionalización de denominadores de la forma: $5x+\sqrt{x+1}$ su factor racionalizante es: $5x-\sqrt{x+1}$.

B) Si la racionalización se realiza con el denominador de la forma: $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}$; se afirma que su factor racionalizante es: $\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{(ab)^2}+\sqrt[3]{b^4}$.

C) Según la regla práctica de la transformación de radicales dobles o simples, es cierto que: $\sqrt{m+n\pm 2\sqrt{mn}}=2(\sqrt{m}\pm\sqrt{n});m>n$

D) Los radicales: $\sqrt[101]{2x}, \sqrt[101]{3x}, \sqrt[101]{4x}$ son homogéneos.

Razonamiento y demostración

25. Calcula: $E=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}}\cdot\dfrac{2}{1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{6}$ C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{3}-1$ E) $\sqrt{6}+1$

26. Efectúa: $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}+\dfrac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}-3}$

A) 1 B) $\sqrt{5}$ C) $-\sqrt{5}$
D) -1 E) 0

27. El denominador racionalizado de: $P=\dfrac{m-25}{m+7\sqrt{m}+10}$ será:

A) $m-4$ B) $m-2$ C) $m+5$
D) $m-5$ E) $m+4$

28. Si:

$$\sqrt{m+\sqrt{396-216\sqrt{2}}}+\sqrt{n}=\sqrt{6}$$

entonces el valor de la expresión m^2+n^2 es:

A) 65 B) 25 C) 74
D) 90 E) 61

29. Halla el denominador luego de racionalizar: $B=\dfrac{1}{\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{40}}$

A) 13 B) 12 C) 16
D) 14 E) 15

30. Racionaliza e indica el denominador racionalizado de:

$$\frac{8}{\left(1-\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{4}-\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{16}\right)}$$

A) 1 B) 2 C) 5
D) 3 E) 7

Resolución de problemas

31. Racionaliza: $\dfrac{2}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\dfrac{4}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}-\dfrac{1}{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$

y da como respuesta el denominador racionalizado.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) 8

32. Luego de la descomposición en sus radicales simples.

$$P=\sqrt{\sqrt{m}\,r^3+\sqrt{n}\,t^3+\sqrt{nr^6+2pr^3t^3+mt^6}}$$

obtenemos una expresión que se expresa como: $\lambda\sqrt{r^3+t^3}$ Determina el valor de "λ".

A) $\sqrt[7]{7m}$ B) $\sqrt[3]{10p}$ C) $\sqrt[4]{4n}$
D) $\sqrt[5]{5p}$ E) p^2

33. De la igualdad:

$$\sqrt{0{,}00x}+\sqrt{0{,}00y}=\sqrt{0{,}005+\sqrt{0{,}000024}}$$

Indica el producto de su radical simple por la inversa del otro radical simple de:

$P=\sqrt{2x-3\sqrt{y+1}}$; siendo: $x>y$

A) $-\sqrt{2}$ B) $-\dfrac{1}{3}$ C) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
D) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ E) -1



Claves

NIVEL 1
1.
2.
3. E
4. C
5. A
6. D
7. E
8. C
9. B
10. D
11. C

NIVEL 2
12.
13.
14. C
15. C
16. A
17. D
18. C
19. B
20. A
21. B
22. D

NIVEL 3
23. E
24.
25. B
26. E
27. A
28. D
29. C
30. D
31. B
32. C
33. C



Aplicamos lo aprendido



TEMA 4: NÚMEROS COMPLEJOS

1 Calcula:

$R = i^{343} + i^{7331} + i^{4742} + i^{2876}$

A) $-2i$ B) $2i$ C) 2 D) $4i$ E) -2

2 Calcula:

$W = 8i^{208} + 3i^{309} + 5i^{411} + 2i^{17}$

A) 4 B) 8 C) $6 - 2i$
D) $8 - 2i$ E) 0

3 Calcula:

$z_1 = \left(\sqrt{-1}\right)^{4k+1}\left(-\sqrt{-1}\right)^{4k+3};\quad k \in \mathbb{Z}^+$

A) i B) $-i$ C) 1 D) -1 E) 0

4 Reduce:

$$\frac{\sqrt[5]{i} + \sqrt[6]{i^2} + \sqrt[7]{i^3} + \sqrt[8]{i^4}}{i^5 + i^9 + i^{13} + i^8}$$

A) i B) $-i$ C) 1 D) -1 E) 0

5 Simplifica:

$$z = \left(\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i}\right)^4$$

A) 16 B) $16i$ C) -16 D) $-16i$ E) 0

6 Simplifica:

$$E = \frac{1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5}{1 + \frac{1+i}{1-i}}$$

A) i B) $-i$ C) 1 D) $2i$ E) -1

7 Calcula:

$$A = \cfrac{1-i}{1-\cfrac{1-i}{1-\cfrac{1-i}{1-\cfrac{1-i}{1-\cfrac{1-i}{1+i}}}}}$$

A) –6 B) 8i C) i D) –i E) –4

8 Siendo a; b reales que verifican:

$$\left(1+\frac{1}{i}\right)\left(1+\frac{1}{i+1}\right)\left(1+\frac{1}{i+2}\right)...\left(1+\frac{1}{i+99}\right) = a + bi$$

Calcula: $a^2 - b$

A) 100 B) 101 C) 102 D) 103 E) 104

9 Sabiendo que: $\sqrt{A + Bi} = x + yi$

Halla el valor de:

$$P = \frac{B^2}{y^2A + y^4}$$

A) 3 B) 4 C) 2 D) 1 E) i

10 Halla el módulo de:

$w = (3 + 2i)^4 + (5 - 2i)^3 + 22i$

A) 36 B) 45 C) $\sqrt{17}$ D) 54 E) $4\sqrt{2}$

11 Halla el valor de:

$P = |4 + |12i - |-3 + 4i|||$

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

12 Calcula:

$$C = \frac{(1-i)^8}{1+i^8} + \frac{(1+i)^9}{1+i^9}$$

A) 25 B) 21 C) 16 D) 24 E) 17

13 Calcula:

$F = (1 + i)^3 + (1 - i)^3$

A) –4 B) –3 C) –2 D) –1 E) 1

14 ¿Cuál es la parte real de z, si: $z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^i$?

A) $e^{-\pi/4}$ B) $2e^{-\pi/4}$ C) $\sqrt{2}\,e^{-\pi/4}$

D) $(4e^{\pi})^{-1/4}$ E) $4e^{-\pi/2}$



Claves

1. A	3. D	5. A	7. C	9. B	11. C	13. A
2. B	4. C	6. C	8. B	10. D	12. D	14. A



Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. De las proposiciones, indica el valor de verdad.

I. $|z| = |z^*|$; $\forall z \in \mathbb{C}$

II. $|z + i| = |z^* - i|$; $\forall z \in \mathbb{C}$

III. $|z \cdot \bar{z}| = |z^*||z^*|$; $\forall z \in \mathbb{C}$

2. Indica V (verdadero) o F (falso) según corresponda:

I. Una de las raíces complejas de la raíz cúbica de la unidad es el cuadrado de la otra. ( )

II. La suma de las tres raíces cúbicas de la unidad es igual a uno. ( )

III. El producto de las raíces cúbicas de la unidad es igual a uno. ( )

Razonamiento y demostración

3. Calcula:

$$i^{2^{2^2}} + i^{5^{5^5}}$$

A) $1 + i$ B) i C) 1
D) 0 E) 2

4. Calcula:

$R = i^{551} + i^{7331} + i^{4742} + i^{2876}$

A) $-2i$ B) 2 C) $2i$
D) i E) $-i$

5. Sabiendo que:

$\sqrt{A + Bi} = x + yi$

Halla el valor de:

$$P = \left[\frac{B^2}{y^2A + y^4}\right]^2$$

A) 15 B) 9 C) 25
D) 16 E) 1

6. Halla el módulo del complejo:

$z_1 = 5i^5 - (1 + i)^4 + 2i^3$

A) 1 B) 7 C) 5
D) 2 E) 4

7. La expresión es equivalente a:

$$z_1 = \sqrt{\frac{2(i - 1)}{i + 1}}$$

A) $1 - i$ B) $i + 1$ C) $2 + i$
D) $2 - i$ E) $1 + 2i$

8. Simplifica:

$F = (1 + i)^3 + (1 - i)^3$

A) i B) -4
C) $2i$ D) $-i$
E) $-2i$

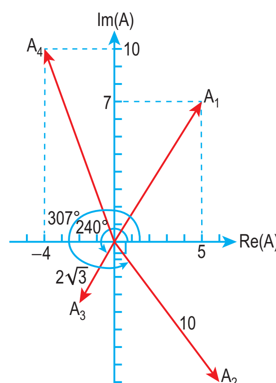
9. Sean los complejos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} - \{(0; 0)\}$ tal que: $z_1 + z_2 = z_2 + z_3 = z_3 + z_1 = a + bi$

Halla: $$\frac{(z_1 - iz_2)^4 + (z_3 + iz_2)^4}{[z_1 + z_3 + i(z_2 - z_1)]^4}$$

A) 1 B) -1 C) $\frac{1}{2}$
D) $-\frac{1}{2}$ E) 0

Resolución de problemas

10. Considerando los afijos del siguiente esquema de Argand:



Determina:

$$P = \frac{(A_2 + A_4)A_1}{A_3}$$

e indica el cuadrante en el que se encuentra el resultado.

A) $\frac{7 + \sqrt{2}}{3} - (1 + 2\sqrt{3}\,i)$; IVC

B) $\frac{\sqrt{3} - 18}{2} + \sqrt{3}\,i$; IIC

C) $\frac{\sqrt{3} - 18}{3} - (1 + 2\sqrt{3})i$; IIIC

D) $\sqrt{3} + 2i$; IC

E) $2 + 5i$; IC

11. Determina el número complejo que al multiplicarlo por "i" nos da otro complejo de módulo 5, parte imaginaria -4 y que pertenezca al cuarto cuadrante.

A) $5(\cos 307° + i\operatorname{sen} 307°)$

B) $5(\cos 37° + i\operatorname{sen} 37°)$

C) $5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

D) $5(\cos 217° + i\operatorname{sen} 217°)$

E) $5(\cos 127° + i\operatorname{sen} 127°)$

NIVEL 2

Comunicación matemática

12. Indica el valor de verdad de las proposiciones:

I. $e^{2n\pi i} = 1, \forall n \in \mathbb{Z}$

II. $e^{\pi i} = -1$

III. $\overline{(e^z)} = e^{\bar{z}}, z \in \mathbb{C}$

IV. $(2^4)^{1/3} = (8^4)^{1/4}$

A) VVVF B) FFFV C) VVFF
D) VFVF E) FVVV

13. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

I. Si: $\operatorname{Re}(z) = 0 \Rightarrow |\operatorname{Im}(z)| \geq 0$; $z \in \mathbb{C}$

II. Si: $|z|^2 = 11\operatorname{Re}(z) \Rightarrow |z - 5{,}5| = 5{,}5$; $z \in \mathbb{C}$

III. Si: $z = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta \Rightarrow z = e^{i(\pi - \theta)}$

A) Solo I B) Solo II
C) I y II D) II y III
E) I, II y III

Razonamiento y demostración

14. Determina:

$$i^{2^{2^2}} + i^{5^{5^5}} + i^{3^{3^3}}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

15. Reduce:

$$E = \frac{1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5}{1 + \dfrac{1 + i}{1 - \dfrac{1 + i}{1 - i}}}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

16. Sean los complejos:

$z_1 = \frac{2 + 3i}{3 - 2i}$; $z_2 = \frac{6 + 7i}{7 - 6i}$;

$z_3 = \frac{20 + 12i}{6 - 10i}$; $z_4 = \frac{18 + 16i}{8 - 9i}$

Calcula la parte imaginaria de:

$z_1 + z_2 + z_3 + z_4$.

A) 3 B) -6 C) 2
D) 6 E) 4

17. Si: $z = a + bi$, donde a y b son reales, y verifica: $z + i = 2$

Calcula: $\overline{|\bar{z} + z|}$

A) 0 B) i C) 4
D) 2 E) 1

18. Calcula: $w_1 = \sqrt[4]{\frac{(1+i)^9}{1+i^9}}$

A) 0 B) 2i C) 4i
D) 16 E) 8i

19. Proporciona un equivalente de: i^i

A) $e^{-\pi/4}$ B) $e^{-\pi/2}$ C) e^{π}
D) $e^{3\pi/2}$ E) $e^{\pi/2}$

Resolución de problemas

20. El producto del complejo $(M + Ni)^2$ por el conjugado del conjugado del opuesto del opuesto de $(M + Ni)$ es $(3 + 4i)^3$. Determina la forma exponencial del complejo $(M + Ni)$.

A) $5e^{\frac{37\pi}{180}i}$ B) $5e^{\frac{53\pi}{180}i}$ C) $5e^{\frac{\pi}{4}i}$
D) $5e^{\frac{\pi}{3}i}$ E) $5e^{\frac{\pi}{6}i}$

21. Si $\bar{z}$ es el conjugado del complejo z de argumento principal θ, además:

$$\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^3 + \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^3 = 1, \text{ calcula: } \cos 18\theta.$$

A) 1 B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{1}{2}$
D) 0 E) –1

NIVEL 3

Comunicación matemática

22. Si: ϕ_0; ϕ_1; ϕ_2; ϕ_3; ϕ_4; ϕ_5; son las raíces de orden 6 de la unidad.
¿Qué clase de número es: $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5$?

A) Nulo
B) Real
C) Imaginario puro
D) Su módulo es 1
E) Más de una es correcta

23. Dada la raíz de un número complejo:
$\sqrt{80 - 18i}$
Indica la verdad o falsedad según corresponda:

I. Tiene como módulo: $\pm\sqrt{82}$ ( )
II. El argumento es: arctan(9) ( )
III. Su forma exponencial es:
$\pm\sqrt{82}\ e^{i \arctan\left(\frac{-1}{9}\right)}$ ( )

Razonamiento y demostración

24. Reduce:

$$R = \sqrt{2\sqrt{i} - \sqrt{2\sqrt[9]{i}}} - 1$$

A) 0 B) 2i C) i
D) –1 E) 1

25. Determina 2a – b si se cumple:

$$a + bi = \left[(2 - 3i)^{i+1}\right]^{1 - i^{33^{34}}}$$

A) 0 B) –3 C) 4
D) 5 E) 2

26. Si se cumple: $\frac{1 + ai}{a + i} + \frac{a + 3i}{1 - ai} = ki$;
$k, a \in \mathbb{R}$

Calcula: $k^4 + 1$

A) 15 B) 16 C) 17
D) 19 E) 20

27. Halla a + b en:

$$\frac{3 + 2i}{2 + \frac{1}{i}} + \frac{5 - i}{2i} + 2i = a + bi$$

A) 1,5 B) 1,2 C) 1,3
D) 1 E) 2

28. Halla: |k|

$$k = \frac{(1-i)^5 - 1}{(l+i)^5 + 1} - \frac{(1-i)^6 - 1}{(l+i)^6 + 1}$$

A) 1 B) 1,6 C) 0,6
D) 2 E) 3

29. Si: $i^5 = i = i^{17}$, calcula:

$$z = \sqrt{2\sqrt{i} - \sqrt{i + \sqrt[17]{i^5}}}$$

A) 1 + i B) 1 – i C) –1 + i
D) i + 2 E) –2 + i

30. Si: $z = \frac{1 + 4n^2 i}{8n^2 - i}$, $n \in \mathbb{R}$.

Calcula: $\left|z - \frac{3}{4}i\right|$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{16}$
D) $\frac{1}{64}$ E) $\frac{1}{128}$

Resolución de problemas

31. Se tienen dos números complejos cuya diferencia es real e igual a 1, además, su cociente es un imaginario puro; si el módulo de su diferencia es igual al módulo del cociente, halla uno de estos complejos.

A) $\frac{1}{3}(1 - i)$ B) $\frac{1}{2}^{(1+2i)}$
C) $\frac{1}{4}(1 - i)$ D) $-\frac{1}{2}(1 - i)$
E) 1 + i

32. Calcula el número de complejos z que verifican:
$z^2 + 12 = |z|^2 - i$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5



Claves

NIVEL 1	7. B	13. C	20. A	26. C
1.	8. B	14. A	21. E	27. B
2.	9. D	15. A	NIVEL 3	28. B
3. A	10. C	16. D	22. E	29. A
4. C	11. D	17. C	23.	30. B
5. D	NIVEL 2	18. B	24. C	31. D
6. C	12. A	19. B	25. E	32. B

MARATÓN Matemática

Reduce: $\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt{i}+\sqrt{\sqrt{i}^{20}}}-1}$ $\quad i=\sqrt{-1}$ (unidad imaginaria)

Resolución:

Siendo: $i=\sqrt{-1}$

Sabemos $i^5=i \Rightarrow \sqrt{\sqrt{i^{20}}}=i^5=i$

Reemplazando en la expresión:

$\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt{i}+i}-1}=\sqrt[5]{\sqrt{2i}-1}$ ...(1)

Sabemos también:

$(1+i)^2=2i$

Reemplazando en (1):

$\Rightarrow \sqrt[5]{(1+i)-1}=\sqrt[5]{i}=\sqrt[5]{i^5}=i$

$\therefore \sqrt[5]{\sqrt{i+\sqrt{\sqrt{i^{20}}}}-1}=i$



1. Completa el siguiente recuadro:

z	$\bar{z}$	z*	|z|	Arg(z)
3 + 4i				
4 – 3i				
1 + 7i				
1 – 2i				
1 + 3i				

2. Calcula el valor de x:

$35C_x^{34}=28C_7^{35}$

A) 10 B) 11 C) 15
D) 30 E) 27

3. Reduce la siguiente expresión:

$M=\dfrac{\sqrt{8+\sqrt{60}}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$

A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$
D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

4. El MCD de $P(x)=x^3+4x^2+mx+n$ y $Q(x)=x^2-mx+n$ es $(x+2)$. Indica su MCM.

A) $(x+2)(x+3)$
B) $(x+2)(x+1)(x-1)$
C) $(x+2)^2$
D) $(x+n)(x+2)(x-3)$
E) $(x+2)(x-3)(x-1)(x+3)$

5. Determina el sexto término de:

$\left(x-\dfrac{y}{x}\right)^8$

A) $36x^2y^8$ B) $72x^2y^5$ C) $-56x^{-2}y^5$
D) $32x^7y^7$ E) $8xy^8$

6. Simplifica:

$M=\sqrt{36+2\sqrt{320}}-\sqrt{21+2\sqrt{80}}$

A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{20}$ C) 4
D) $\sqrt{5}+4$ E) $4-\sqrt{5}$

7. Racionaliza:

$R=\dfrac{\sqrt{7}-2+\sqrt{3}}{\sqrt{7}+2+\sqrt{3}}$

A) $\dfrac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{3}}$ B) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{4}$ C) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$
D) $\sqrt{7}-4$ E) $\frac{1}{6}(\sqrt{3}-\sqrt{7})$

8. Se tiene el siguiente desarrollo $(xy^3+\sqrt{y}\,x)^{16}$. El séptimo término del desarrollo es de la forma: $182mx^py^q$

Determina el valor de: $\dfrac{m}{44}.C^p_{(q-19)}$

A) 103 B) 114 C) 120
D) 302 E) 451

9. Efectúa:

$E=(1+i)^{16}+(1+i)^{17}-(1-i)^{16}$

A) $2^8(1+i)$ B) 2^9+i C) 2^9+1
D) 2^{10} E) 2^9-i

10. Determina $|12+bi|$, siendo: $z=2+bi$ y $|1-z|=2$

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{7}$
D) $\sqrt{5}$ E) 2

Unidad 3





RECUERDA

Teoría de números

Euler, quien se ocupó de una manera definitiva de lo que hoy en día conocemos como teoría de números, comenzó estudiando los teoremas de Fermat, para desarrollar a continuación todos los aspectos de esta teoría, preferentemente utilizando métodos aritméticos y algebraicos, rehuyendo en la medida de lo posible del análisis infinitesimal.

A él le debemos la actual teoría de congruencias, a la que llegó tras extensos trabajos sobre divisibilidad y tras introducir el concepto de raíz primitiva según el módulo m. No de menor importancia que la teoría de congruencias fueron sus trabajos sobre problemas de análisis diofántico, para cuyas necesidades elaboró y fundamentó la teoría de las fracciones continuas. Asimismo elaboró los métodos analíticos para la resolución del problema de la distribución de los números primos, en la serie de los números naturales y también para una serie de problemas aditivos.

El primero de estos problemas fue tratado también por Legendre y Chebyshev. Para el segundo de los problemas, donde se estudia el desarrollo de los números grandes en sumandos menores, cabe destacar junto a Euler los nombres de Waring y Lagrange.

La teoría de números en el siglo XVIII, se convirtió pues, en una rama independiente, sintetizada en los trabajos de Euler, Lagrange, Legendre y Lambert entre otros, definiéndose prácticamente los principales problemas y direcciones.

Reflexiona

- *No te cierres a aprender, porque quien ha dejado de progresar ha comenzado a morir.*
- *Te desafío a reconocer los errores que has cometido y resarcirlos, a volver a ser humilde.*
- *La mejor forma de crear riquezas es llegar a estar libre de deudas y mantenerse así.*

¡Razona...!

¿Quién es el hijo del padre del padre del bisnieto de mi abuelo, si yo soy hijo único?

A) Yo mismo
B) Mi hermano
C) Mi sobrino
D) Mi padre
E) Mi tío



Aplicamos lo aprendido



TEMA 1: ECUACIONES DE PRIMER GRADO PLANTEO DE ECUACIONES

1 Resuelve:

$$\frac{x+m}{2}-6+\frac{m-x}{5}=\frac{7m}{10}$$

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

2 Resuelve:

$$(x+4)^2+(x-2)^2=2x^2+60$$

A) 10 B) 9 C) 12 D) 16 E) 20

3 Resuelve:

$$\frac{m-x}{m}-\frac{n-x}{n}=\frac{2(m-n)}{mn}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) –2 E) 0

4 Resuelve:

$$\frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}=\frac{x-3}{4}+\frac{x-4}{5}$$

A) 1 B) –2 C) –1 D) 2 E) 0

5 Halla el valor de x en:

$$\frac{x-a}{ab}-\frac{x-b}{ac}=\frac{x-c}{bc}$$

A) $\frac{b^2}{a+b-c}$ B) $\frac{b}{a+b-c}$ C) $\frac{b^2}{a+b+c}$

D) $\frac{c^2}{a+b-c}$ E) $\frac{c}{a+b+c}$

6 Halla el valor de x en: $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{4}=\frac{x+3}{6}$

A) $-\frac{6}{7}$ B) $\frac{6}{7}$ C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{2}{3}$

7 Resuelve: $\frac{x-6}{x+4}=\frac{x+7}{x-2}$

A) $-\frac{8}{5}$ B) $-\frac{16}{19}$ C) $\frac{8}{5}$ D) –2 E) 2

8 Halla el valor de x en: $\frac{x+5}{x+2}=\frac{x+6}{x-2}$

A) $-\frac{17}{3}$ B) $-\frac{23}{3}$ C) $-\frac{22}{5}$
D) 1 E) 2

9 Resuelve: $\frac{x+2}{x+3}=\frac{x+6}{x-3}$

A) $\frac{5}{12}$ B) $\frac{17}{14}$ C) $\frac{14}{17}$
D) 4 E) $-\frac{12}{5}$

10 Un empresario decide entregar a cada uno de sus trabajadores S/.250. Uno de ellos es despedido y el total es repartido entre los demás, recibiendo cada uno S/.300. ¿Cuántos eran los trabajadores inicialmente?

A) 4 B) 5 C) 7 D) 10 E) 6

11 Halla el valor de x en: $(x-5)(x+3)+2=x^2-5x+3$

A) $\frac{8}{3}$ B) 5 C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{16}{3}$ E) $\frac{5}{2}$

12 Resuelve:
$(x+3)^3-x^3-9x^2=54$

A) 0 B) –1 C) 1 D) 2 E) –2

13 Una caja de lápices contiene una tercera parte más de lápices que una segunda caja. Si esta última tiene 3 lápices menos, ¿cuántos lápices tendrá la primera caja?

A) 18 B) 9 C) 6 D) 12 E) 15

14 Mariano puede despachar periódicos en dos veces el tiempo que le tomará a Alberto. ¿Cuánto tiempo le tomará a cada uno si pueden hacer juntos el trabajo en 3 h?

A) 10 h y 5 h B) 3 h y 1,5 h
C) 20 h y 10 h D) 24 h y 12 h
E) 9 h y 4,5 h



Claves

1. B	3. B	5. A	7. B	9. E	11. D	13. D
2. A	4. C	6. A	8. C	10. E	12. C	14. E

Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Dada la ecuación

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}x-1\right)-1\right)=1$$

Concluimos que:

I. También es equivalente a la ecuación: $\frac{1}{4}x=22$

II. Presenta como raíz $x=84$.

III. 4 es una solución de la ecuación.

IV. La ecuación es inconsistente.

A) FVFF B) VVFF C) FFVF
D) VVVF E) FVFV

2. Verifica la verdad o falsedad de los conjunto solución (CS) de las ecuaciones presentadas:

A) $3x-9=0$ CS $=\{-3\}$ ( )
B) $10x+0=0$ CS $=\{0\}$ ( )
C) $0x+101=0$ CS $=\{0\}$ ( )
D) $0x+0=0$ CS $=\mathbb{R}$ ( )

Razonamiento y demostración

3. Calcula x en:

$$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x}{6}=8$$

A) 20 B) 18 C) 36
D) 32 E) 24

4. Resuelve:

$$\frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}+\frac{x-3}{4}=\frac{x-4}{5}$$

A) $\frac{67}{53}$ B) $\frac{28}{31}$ C) $\frac{99}{32}$
D) 1 E) 7

5. Resuelve:

$$\frac{1}{3}(x+3)+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}(x-1)-(x-3)$$

A) 13/5 B) 18/5 C) 11/2
D) 14/5 E) 18/15

6. Halla el valor de x en: $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{6}}=\dfrac{\frac{2x-1}{4}}{\frac{5}{4}}$

A) 0 B) $\frac{3}{2}$ C) 2
D) $\frac{7}{4}$ E) $\frac{4}{3}$

7. Resuelve:

$$\frac{a}{b}\left(1-\frac{a}{x}\right)+\frac{b}{a}\left(1-\frac{b}{x}\right)=1$$

A) ab B) a – b C) a + b
D) 1 E) 2

8. Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{2}{3}\left(\frac{x+6}{6}\right)-\frac{2}{5}\left(\frac{x+1}{4}\right)=\frac{11-x}{3}$$

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

9. Resuelve la siguiente ecuación:

$$1-\frac{x+3}{9}+x=\frac{9x+1}{9}$$

A) 7 B) 8 C) 5
D) 4 E) 6

Resolución de problemas

10. Una colección de libros cuesta 500 soles menos que un televisor. Si a la cuarta parte del precio de la colección se le aumenta 60 soles, se obtiene la quinta parte del precio del televisor. ¿Cuál es el precio del televisor?

A) 800 B) 1100 C) 1300
D) 1000 E) 1200

11. En la ecuación:
$[(a-1)x+2a-1]x+3ax=2a-3$
Halla el valor del parámetro "a" si la ecuación se transforma en una de primer grado.

A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

12. Para hacer un trabajo, le tomará a Yuliana 3 h, a Brenda 5 h y a Bianca 6 h, cada una trabajando sola. ¿Cuánto tiempo les tomará si todas trabajan juntas?

A) $1\frac{3}{7}$ h B) $1\frac{2}{5}$ h C) $3\frac{2}{5}$ h
D) $5\frac{3}{2}$ h E) $21\frac{1}{5}$ h

NIVEL 2

Comunicación matemática

13. Para la ecuación de primer grado: $ax+b=0$ verifica la verdad o falsedad:

( ) Es determinada si $a=0 \wedge b\neq 0$.

( ) Es absurda si $a\neq 0 \wedge b=0$.

( ) Es determinada y la raíz es nula si $a\neq 0 \wedge b=0$.

A) FVF B) VFF C) FFV
D) FFF E) VVV

14. Resuelve: $ax+b=\frac{a-bx}{2}$ e indica el valor de verdad de las proposiciones:

I. Tiene solución única si: $a\neq -b$

II. Si $a=2b$ y $a=-b$, la ecuación no tiene solución.

III. No tiene solución si $a=-b$ y $a\neq 2b$.

IV. Tiene solución única si $a=b\neq 0$.

A) VFVF B) VVFF C) FFFV
D) VFVV E) VVVF

Razonamiento y demostración

15. Calcula x en:

$$\frac{6x}{6}+\frac{3}{2}=\frac{9x}{3}-\frac{5}{5}$$

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{5}{4}$
D) $\frac{7}{2}$ E) $\frac{2}{7}$

16. Determina el valor de x.

$$5-\frac{x}{3}=\frac{x}{6}+6$$

A) –1 B) 7 C) –2
D) 0 E) 9

17. Halla el valor de x.

$$\frac{4}{3}(x+2)=\frac{8}{3}+4(x-2)$$

A) 2 B) 3 C) 0
D) 1 E) 8

18. Calcula x.

$$\frac{1}{3}(x-2)+2=\frac{1}{5}(x-2)+8$$

A) 42 B) 35 C) 47
D) 16 E) 50

19. Halla x: $2x+8=\frac{x}{3}+9$

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{7}{3}$ E) $\frac{3}{5}$

20. Resuelve: $\frac{x^3+3x}{3x^2+1}=\frac{91}{37}$

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

21. Resuelve: $x-\sqrt{x^2-21}=7$

A) 5 B) 3
C) 4 D) 1
E) Ecuación incompatible

Resolución de problemas

22. Un niño crece mensualmente 2,5 cm durante el primer año y 0,6 cm los meses siguientes (hasta los 18 años). ¿Cuánto medirá a los t años y r meses de nacido, si nació midiendo 40 cm?

$(1 < t < 18)$; $(1 \leq r \leq 11)$

A) $40 + 2{,}5t + 7{,}2r$ B) $70 + 0{,}6t + 2{,}5r$

C) $40 + 2{,}5(t + r)$ D) $40 + 2{,}5t + 0{,}6r$

E) $70 + 7{,}2t + 0{,}6r$

23. Pablo puede construir un armario en 3 semanas. A Ramón le tomará 5 semanas. ¿Cuánto tiempo le tomará a Gabino si, trabajando los tres juntos, pueden hacer el trabajo en una semana?

A) $3\frac{1}{7}$ semanas B) $4\frac{1}{7}$ semanas

C) $2\frac{1}{3}$ semanas D) $2\frac{1}{7}$ semanas

E) $\frac{1}{7}$ semanas

NIVEL 3

Comunicación matemática

24. Señala la ecuación que no cumple a la precedente:

$27x^2 - 12 = 27x^2 - 18x$

I. $9x^2 - 4 = 9x^2 - 6x$

II. $(3x + 2)(3x - 2) = 3x(3x - 2)$

III. $3x + 2 = 3x$

IV. $2 = 3x$

V. $3x - 4 = -2$

A) V B) III C) I
D) II E) IV

25. De las proposiciones, marca verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. Luego de resolver:

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{x^2 + x - 6}$$

podemos asegurar que la ecuación es incompatible.

II. Si se resuelve:

$$\frac{x + \sqrt{3}}{x - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$

llegamos a la conclusión que la ecuación es compatible determinada.

III. La igualdad:

$$\frac{5x - 2}{3} - \frac{x - 1}{2} = \frac{7x - 1}{6}$$

verifica para todo valor que pueda tomar la variable x.

IV. Al resolver:

$$\frac{x + 3}{x - 2} + \frac{x + 6}{x - 5} = \frac{2x^2 - 4x + 3}{x^2 - 7x + 10}$$

se verifica solo para $x = 6$ o $x = 4$

A) VVFF B) FVFV C) FFVV
D) FVVF E) VFFV

Razonamiento y demostración

26. En la siguiente ecuación:

$(x + 2) + (x + 4) + (x + 6) + (x + 8) + ... + (x + 2n) = n^2 + 3n$

donde: $n \in \mathbb{Z}$ y $n \geq 2003$. El valor de x es:

A) $\frac{2n + 1}{2}$ B) 6 C) $\frac{3n}{2}$

D) 2 E) $\frac{n - 1}{2}$

27. Halla x, en:

$$2 + \frac{3 - x}{2} + \frac{x - 1}{3} = \frac{x + 1}{4}$$

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

28. Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{2}{5}\left(\frac{x + 70}{80}\right) - \frac{x + 30}{40} = \frac{-6 + 2x}{5} - \frac{x + 7}{5}$$

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

29. Resuelve :

$$\frac{x - ab}{a + b} + \frac{x - ac}{a + c} + \frac{x - bc}{b + c} = a + b + c$$

Además: $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}^+$

A) $ab - ac - bc$ B) $ab + ac - bc$

C) $ab + ac + bc$ D) $ab - ac + bc$

E) $ab + ac$

30. Resuelve:

$$\frac{x - a}{b + c} + \frac{x - b}{c + a} + \frac{x - c}{a + b} = 3$$

Donde: $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}^+$

A) $a + b - c$ B) $a + b + c$
C) $a - b + c$ D) $a - b - c$
E) $b + c$

31. Halla el valor de x en:

$$2 + \frac{5}{x - 2} = \frac{(x + 1)^2 - 4}{x - 2} - x - 2$$

A) $x \in \mathbb{R}$ B) $x \in \varnothing$ C) $\frac{1}{3}$
D) $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ E) $\frac{3}{2}$

32. Resuelve:

$$x - 5 + \frac{4}{x - 6} = 7 - x + \frac{4}{x - 6}$$

A) 6 B) –6
C) $6 \wedge -6$ D) Indeterminada
E) Incompatible

Resolución de problemas

33. En una iglesia, si los asistentes se sientan 12 en cada banca, se quedan 11 de ellos de pie, pero si se sientan 15 en cada banca, la última banca solo tendría 11 feligreses. ¿Cuántos asistentes tiene la iglesia?

A) 57 B) 73 C) 71
D) 49 E) 63

34. Gilberto puede preparar una masa en 8 h, le tomará a Gálvez 2 veces más tiempo que a Mariano. ¿Cuánto tiempo le tomará a Mariano si, trabajando juntos, los tres lo pueden hacer en 4 h?

A) $10\frac{1}{3}$ h B) $5\frac{2}{3}$ h C) $4\frac{1}{3}$ h

D) $\frac{1}{2}$ h E) $10\frac{2}{3}$ h



Claves

NIVEL 1
1. A
2.
3. E
4. A
5. D
6. B
7. C
8. A
9. C
10. C
11. E
12. A

NIVEL 2
13. C
14. A
15. C
16. C
17. B
18. C
19. E
20. A
21. E
22. E
23. D

NIVEL 3
24. B
25.
26. D
27. B
28. E
29. C
30. B
31. D
32. E
33. C
34. E

Aplicamos lo aprendido



TEMA 2: MATRICES Y DETERMINANTES

1 Calcula: a + b, si las matrices A y B son iguales:

$$A=\begin{pmatrix} a-4b & 3 \\ a & 2a-b \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 6 & b-a \\ -6 & a+b \end{pmatrix}$$

A) –6 B) –3 C) 6 D) –9 E) 9

2 Sabiendo que:

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad BA=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcula la traza de: (A + B)(A – B)

A) 0 B) 1 C) 2 D) – 1 E) – 2

3 Dada la matriz:

$$D=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Determina: $2D^T$

A) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 14 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}$

4 Si A es una matriz es triangular superior, calcula a + b + c.

$$A=\begin{pmatrix} 7 & c-1 & b+7 \\ a-3 & 6 & a+4 \\ b+2 & c-1 & 7 \end{pmatrix}$$

A) 3 B) 4 C) 6 D) 2 E) 5

5 Halla A^T, si:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A) $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

6 Sean:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Halla: A – B

A) $\begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 \\ -7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ 7 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

7 Sean: $A = (3 \quad 2 \quad 1)$; $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Halla: $A \times B$

A) 16 B) 14 C) 15 D) 11 E) 13

8 Dadas:

$B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Calcula: $3B + 4A$

A) $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 7 & 29 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

9 Si B es una matriz definida por:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \sec^2 x & \tan^2 x & 3 \\ 4 & 4\cos^2 x & -4\text{sen}^2 x & 1 \\ 5 & 5\text{sen}^2 x & -5\cos^2 x & 7 \\ 6 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

entonces el valor de |B| es:

A) senx cosx B) $(\text{senx cosx})^2$

C) $\sec^2 x \tan^2 x$ D) $\text{sen}^2 x + \tan^2 x$

E) 0

10 Calcula el valor de:

$$A = \begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 71 & 91 \\ 4 & 72 & 92 \\ 5 & 73 & 93 \end{vmatrix}$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

11 Halla el valor del determinante:

$$B = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 & 4 \\ 4 & 6 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

A) 20 B) 36 C) 24 D) 28 E) 30

12 Halla el determinante de la siguiente matriz:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 6 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A) 0 B) –2 C) –10 D) –5 E) –7

13 Halla:

$$E = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 7 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 6 \\ 5 & -3 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

A) 0 B) 18 C) 26 D) 36 E) 48

14 Calcula un valor de x, si:

$$\begin{vmatrix} 1 & x+2 & (x+2)^2 \\ 1 & 2x & 4x^2 \\ 1 & x^2 & x^4 \end{vmatrix} = 0$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5



Claves

1. D	3. A	5. C	7. E	9. E	11. C	13. A
2. A	4. D	6. A	8. D	10. A	12. C	14. B

Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Si: $A = [a_{ij}]_{23\times2}$; $a_{ij} = i + j$
$B = [b_{ij}]_{2\times41}$; $b_{ij} = 2i + 3j$

Siendo C = A . B, calcula el valor del elemento c_{34}.

A) 136 B) 121 C) 114
D) 125 E) 134

2. Calcula la suma de los elementos de A, si:

$$A = [a_{ij}]_{2\times3} \wedge a_{ij} = \begin{cases} 3; & i > j \\ 0; & i < j \\ 1; & i = j \end{cases}$$

Razonamiento y demostración

3. Calcula Traz(X) si X es la matriz que verifica:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} . X = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

A) 16 B) 24 C) –16
D) 20 E) – 20

4. Dado el polinomio:
$Q(X) = X^2 - 3X - I$

y la matriz: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Calcula la suma de los elementos de Q(B).

A) 9 B) 7 C) 5
D) 8 E) 10

5. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Determina la matriz X.

si: $2X = 3[A - 2(B + C) - X] + A$

A) $\begin{pmatrix} 1/4 & 1/8 \\ -1 & 2/3 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

6. Calcula el valor de: $\dfrac{y}{x + z}$

Si: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

7. Dadas:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \ Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si: $P(A; B) = 2A - B + 3$

Determina: P(X; Y)

A) $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

8. Halla la suma de los elementos de A, tal que:

$$A . \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

A) 5 B) –2 C) 0
D) 1 E) 3

Resolución de problemas

9. Si $A = (a_{ij})_{3\times3}$ es una matriz, tal que |A| = 2 y $B = (b_{ij})_{2\times2}$ es otra matriz, tal que |B| = 3. Halla el valor de:

$$T = \frac{|A^3| 2B||}{||A|B^T|}$$

A) 144 B) 576 C) 1152
D) 1628 E) 2304

NIVEL 2

Comunicación matemática

10. Si S es el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} 2x - 1 & 3x & x - 2 \\ 2x + 1 & x & 2x + 1 \\ 2x - 1 & 3x & 3x - 2 \end{vmatrix} = 0$$

Entonces indica el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. n(S) = 3

II. $S = \varnothing$

III. La ecuación posee 3 raíces.

IV. $S \cap \{1; 2; 3\} = \varnothing$

A) FFVV B) FFFF C) FVVF
D) VFVV E) VFVF

11. Relaciona cada matriz con su determinante:

Matriz	Determinante
$\begin{vmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{vmatrix}$	$(-2)(8)-(-4)(6)$
$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix}$	$6(8)-(-4)(-2)$
$\begin{vmatrix} ab & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$	$-ab-1$
$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -ab \end{vmatrix}$	$ab+1$
$\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -8 \end{vmatrix}$	$ab-1$
$\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -4 & 8 \end{vmatrix}$	$4(-6)-2(-8)$
$\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}$	$1-ab$
$\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 8 \end{vmatrix}$	$2(-8)-4(-6)$

Razonamiento y demostración

12. Si:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } P(x)=x^2+3x-4$$

halla P(A) e indica la suma de la diagonal principal.

13. Resuelve la ecuación en x.

$$\begin{vmatrix} i & x & x & x \\ -x & i & x & x \\ -x & -x & i & x \\ -x & -x & -x & i \end{vmatrix} = -4;\ i=\sqrt{-1}$$

Da como respuesta la menor raíz.

A) –1 B) $-\sqrt{3}$ C) $-\sqrt{5}$
D) $-\sqrt{7}$ E) –2

14. Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} x & -3y & x \\ 1 & 6 & y \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -y \\ 1 & 6 & -x \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} -4 & -8 & 7 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Si: A = B, halla: 3A + 2C

A) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 20 \\ 7 & 24 & 0 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 8 & 16 & 7 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 16 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 20 \\ 7 & 24 & 1 \end{pmatrix}$

15. Halla: (x – y)(z – w)

$$\text{Si: } \begin{pmatrix} 2x-z & w-y \\ z-x & w+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

A) –8 B) –6 C) –4
D) –10 E) –12

16. Calcula:

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & & \vdots \\ 2 & 2 & 3 & 2 & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & 4 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

A) –2(n – 2)! B) 2(n – 2)! C) 2n!
D) –2(n)! E) –2(n – 1)!

17. Calcula el determinante de la matriz A, definida por:

$$A=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{pmatrix}$$

A) 16 B) 9 C) $9\sqrt{10}$
D) $9\sqrt{10}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ E) $9\sqrt{10}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

Resolución de problemas

18. Si $A=(a_{ij})_{n\times n}$ tal que $|A|\neq 0$, además:

$f(x)=|A-xI|;\ g(x)=|A^{-1}-xI|\neq 0$

$g(x)=h(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$

Entonces la función h es:

A) $\frac{x^n}{|A|^n}$ B) $x^n|A|$ C) $x^n(-1)^n|A|$

D) $\frac{x^n(-1)^n}{|A|^n}$ E) $\frac{x^n(-1)^n}{|A|}$

NIVEL 3

Comunicación matemática

19. Si $B=(b_{ij})$ es una matriz cuadrada de orden n, tal que:

$$b_{ij}+b_{ji}=\begin{cases} 2; & i=j \\ 0; & i\neq j \end{cases}$$

$AB+AB^t=6I$, halla |A|.

A) 3 B) 2 C) 2^n
D) 3^n E) 6^n

20. Lenguaje

Para resolver este logogrifo debes sustituir los números de los recuadros por letras según la teoría de matrices.

Una pista!!

Cada número nos representa siempre la misma letra

5	2	6	1	3	5	2	4	2	I
	2	5	4	7	8	1	4	9	II
		6	10	17	4	9	4	11	III
			19	4	3	11	5	21	IV
				3	11	4	21	4	V
					1	18	9	4	VI
						2	8	10	VII
							10	5	VIII
								4	IX

I. Es aquella matriz escalar donde todos los elementos de la diagonal principal son iguales a la unidad.

II. Es aquella matriz no nula, donde todos los elementos fuera de la diagonal principal son ceros.

III. Es aquella matriz diagonal donde todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

IV. Es un arreglo rectangular de elementos dispuestos en filas y columnas.

V. Es la suma de todos los elementos de la diagonal principal de una matriz cuadrada.

VI. Es aquella matriz, donde todos sus elementos son iguales a cero.

VII. La matriz $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ es de orden:

VIII. Es una determinante de Vandermonde de orden tres:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c-b)(c-a)(b-a)$$

¿SÍ o NO?

IX. La primera:

Razonamiento y demostración

21. Si la matriz A es simétrica, calcula su traza:

$$A = \begin{pmatrix} x & 5 & 3z+x \\ x+2y & y & 20 \\ 11 & 2y+3z & z \end{pmatrix}$$

A) 12/5 B) 7 C) 35/6
D) 27/8 E) 34/3

22. Si A es una matriz definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 1^2 & 3^2 & 5^2 & 7^2 \\ 9^2 & 11^2 & 13^2 & 15^2 \\ 17^2 & 19^2 & 21^2 & 23^2 \\ 25^2 & 27^2 & 29^2 & 31^2 \end{pmatrix}$$

Entonces el Det(A) es:

A) 0 B) 1 . 3 . 5 . 7
C) $(1 . 3 . 5 . 7)^2$ D) 1
E) –1

23. Si E es una matriz definida por:

$$E = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Entonces el Det(E) es:

A) 0 B) 416 C) –216
D) –416 E) –532

24. Si $A = (a_{ij})_{n \times n}$ es una matriz definida por:

$$\begin{pmatrix} a+b & a & a & \dots & a \\ a & a+b & a & \dots & a \\ a & a & a+b & \dots & a \\ & & & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a & a & a & \dots & a+b \end{pmatrix}$$

Entonces el valor del Det(A) es:

A) 0 B) $(a+b)^n$
C) $b^n + nab^{n-1}$ D) $a^n + nb$
E) $a^n + nba^{n-1}$

25. Si A es una matriz definida por:

$$A = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^2 & a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ a & 2a+1 & a+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces el valor del Det(A) es:

A) $2a^3(a-1)^3$ B) $a^2(a-1)^4$
C) $a^4(a-1)^2$ D) $a(a-1)^5$
E) $(a-1)^6$

26. Si N es una matriz definida por:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces el valor del Det(N) es:

A) $3 . (5^4)$ B) 5^4 C) $2 . (5^4)$
D) $5 . (3^4)$ E) $-3(5^4)$

Resolución de problemas

27. Si: $A = (a_{ij})_{n \times n}$ y $|A| \neq 0$;

simplifica: $\text{Det}\left(A^{-1}\text{Det}\left(\frac{2A^T}{|A|}\right)\right)$

A) $2^{n^2}|A|^{n^2-n}$ B) $2^n|A|^{1-n^2}$
C) $2|A|^{-n^2+n-1}$ D) $2^{n^2}|A|^{-n^2+n}$
E) $2^{n^2}|A|^{-n^2+n-1}$

28. Si A, B y C son matrices cuadradas de orden 4, que satisfacen las siguientes condiciones:

$\text{Det}(A^2B^3C) = 1$

$\text{Det}(2A) = 32$

$\text{Det}(B^3C^2) = \frac{27}{16}$

Entonces, el valor de:

$T = 2\text{Det}(A) + 3\text{Det}(B) + 4\text{Det}(C)$ es:

A) 16 B) 28 C) 30
D) 32 E) 48



Claves

NIVEL 1
1. A
2.
3. A
4. E
5. D
6. A
7. C
8. A
9. C

NIVEL 2
10. A
11.
12.
13. C
14. A
15. A
16. A
17. E
18. E

NIVEL 3
19. D
20.
21. C
22. A
23. D
24. C
25. E
26. A
27. E
28. D

Aplicamos lo aprendido





TEMA 3: SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

1 Halla a:

$5a + 3b = 36$
$4a - 2b = 20$

A) 5 B) 7 C) 8 D) 4 E) 6

2 Halla y:

$12x + 7y = 260$
$4x - 5y = -60$

A) 20 B) 10 C) 30 D) 15 E) 18

3 Para qué valores de k el sistema:

$(2k + 1)x + 5y = 7$
$(k + 2)x + 4y = 8$

tiene solución única.

A) $k \neq 2$ B) $k \neq 3$ C) $k \neq -3$
D) $k \neq 1; 2$ E) $k \neq 6$

4 Si el sistema:

$(m - 2)x + 5y = 6$
$3x + 5my = 18$

admite infinitas soluciones; el valor de m es:

A)2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

5 Si el sistema:

$(p - 1)x - 4y = 11 + p$
$-x + (p + 2)y = 2$

Tiene más de una solución, el valor de p es:

A) 3 B) 2 C) 1 D) –2 E) –3

6 Calcula los valores de a y b en el sistema para que tenga infinitas soluciones.

$ax - 2y = 4$
$x - by = 2$

A) $a = 2$ y $b = -1$ B) $a = -2$ y $b = 1$
C) $a = 2$ y $b = 1$ D) $a = 2$ y $b = 4$
E) $a = 1$ y $b = 2$

7 Calcula el producto de las soluciones de:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = a \\ x + y = b \end{cases}$$

A) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ B) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ C) $\frac{1}{b} - b$

D) $\frac{b}{a}$ E) $\frac{a}{b}$

8 Resuelve y da como respuesta $(x + y)$.

$$\begin{cases} ax + (a - 1)y = 2a - 1 \\ (b + 1)x + (b + 1)y = 2b + 2 \end{cases}$$

Considera $b \neq -1$.

A) 1 B) 2 C) 0

D) $a + b$ E) $2a - b$

9 Halla el valor de n para que el sistema:

$(3 + 5n)x + 9y = 4$

$(1 + 3n)x + 5y = 3$

sea incompatible.

A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 8

10 Calcula $m^2 + n^2$; si el sistema es indeterminado.

$$\begin{cases} mx + ny = 4 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

A) 70 B) 80 C) 47 D) 65 E) 72

11 Calcula k de modo de que el sistema tenga infinitas soluciones.

$$\begin{cases} (k - 1)x = -y \\ x = 2y \end{cases}$$

A) 2/3 B) –1/2 C) 1/2 D) 3/5 E) 3/4

12 Calcula m para que el sistema tenga solución única.

$$\begin{cases} x - 3y = m - mx \\ 3x + 2y = n + mx \end{cases}$$

A) $m \neq 2$ B) $m = 2$ C) $m \neq 13$

D) $m \neq 11$ E) $m = 11$

13 Determina a en el sistema de modo que tenga infinitas soluciones.

$$\begin{cases} ax + y = 0 \\ x + ay = 0 \end{cases}$$

A) 1 B) ±1 C) –2 D) –1 E) 2

14 Determina el valor que no puede tomar n cuando el sistema es compatible determinado.

$$\begin{cases} 25x - 5n^2y = 1 \\ 5nx - y = 3 \end{cases}$$

A) 0 B) 1 C) 3 D) –1 E) 2



Claves

1. E	**3.** A	**5.** E	**7.** D	**9.** B	**11.** C	**13.** B
2. A	**4.** B	**6.** C	**8.** B	**10.** B	**12.** D	**14.** B

Practiquemos





NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Verifica si es correcta (C) o incorrecta (I) cada una de las siguientes proposiciones:

I. El sistema:
$3(a + 2) = 2b$
$2(b + 5) = 7a$
es compatible determinado.

II. El sistema:
$29 - 7y = -5x$
$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 0$
es indeterminado.

III. El sistema:
$\frac{x + y}{4} + \frac{x - y}{2} = 3$
$\frac{12x - 7y}{13} = 3$
no admite solución.

A) CCI B) CCC C) CII D) IIC E) ICI

2. Relaciona adecuadamente:
Dado el sistema de ecuaciones:
$Mx + Ny = P$
$Qx + Ry = S$

I. $\frac{M}{Q} = \frac{N}{R} \neq \frac{P}{S}$
II. $\frac{M}{Q} \neq \frac{N}{R}$
III. $\frac{M}{Q} = \frac{N}{R} = \frac{P}{S}$

a. El sistema no tiene solución.
b. El sistema es determinado.
c. El sistema tiene más de una solución.

A) Ic IIa IIIb B) Ib IIc IIIa C) Ia IIc IIIb
D) Ic IIb IIIa E) Ia IIb IIIc

Razonamiento y demostración

3. Resuelve el sistema:
$x + y + z = 10$
$2x + y + z = 12$
$x - y + 2z = 9$
Indica xyz.

A) 30 B) 24 C) 34 D) 18 E) 22

4. ¿Para qué valores reales de m el sistema:
$$\begin{cases} 5mx + (m+2)y = 27 \\ mx + (3-m)y = 8 \end{cases}$$
es compatible determinado?

A) $m \in \mathbb{R} - \{0; 13/6\}$ B) $m \in \mathbb{R}$
C) $m \in \mathbb{R} - \{1\}$ D) $m \in \mathbb{R}^+$
E) $m \in \mathbb{R}^-$

5. Si el siguiente sistema admite como solución x = 2, y = 3. Halla a + b.
$ax - y = 1$
$bx - 2y = 4$

A) 3 B) –2 C) 5 D) –4 E) 7

6. Resuelve y da como respuesta el valor de x.
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 3 \\ x + z = 5 \end{cases}$$

A) 0 B) 1 C) –1 D) 2 E) –2

7. Si x; y; z son números reales positivos, el valor de 0,5xyz es:
$$\begin{cases} xy = 6 \\ yz = 12 \\ xz = 8 \end{cases}$$

A) 15 B) 11 C) 12 D) 10 E) 9

8. Halla m y n para que el sistema tenga infinitas soluciones.
$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ (m-1)x + (n-2)y = 4 \end{cases}$$

A) m = 3; n = 4 B) m = 13; n = 22 C) m = 4; n = 4
D) m = 4; n = 5 E) m = 6; n = 7

Resolución de problemas

9. La suma de las edades de un hombre y su esposa es 6 veces la suma de las edades de los hijos; hace 2 años, la suma de las edades de los esposos era 10 veces la suma de las edades de los hijos; y dentro de 6 años, la suma las edades de los esposos será 3 veces la suma de las edades de los hijos. ¿Cuántos hijos tienen?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10. Si:
$$\frac{xy}{5x + 4y} = 6; \frac{xz}{3x + 2z} = 8; \frac{yz}{3y + 5z} = 6$$
Determina el valor de: $E = \frac{y}{x - z}$

A) 5 B) $\frac{15}{2}$ C) 10 D) $\frac{25}{2}$ E) 25

NIVEL 2

Comunicación matemática

11. Dos sistemas ___________, exactamente con las _____________, se dice que son ____________ si y solo si la solución de una es también la ______________________________ de la otra.

A) cuadrático - diferentes incógnitas - equivalentes - raíz.
B) cúbicas - mismas incógnitas - diferentes - solución.
C) lineales - equivalentes incógnitas - diferentes - conjunto solución.
D) lineales - mismas incógnitas - equivalentes - solución.

12. Memoria

Fija atentamente tu mirada en la imagen por medio minuto. Luego tápala y responde las preguntas.

$\begin{pmatrix} x^2 & 1 & x \\ 1 & x & x \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $Q(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$ $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 5z = 4 \\ 4x + 9y + 25z = 16 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2x-1 & 3x \\ 2x+1 & 7x \end{pmatrix}$ $P(x) = x^2 + 3x + 1$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$\begin{pmatrix} \text{sen}^2x & \tan^2x & 3 \\ -\cos^2x & \sec^2x & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 20 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

¿Cuántas matrices observas?
¿Cuántos sistemas de ecuaciones lineales?
¿Qué expresiones diferentes hay a las observadas anteriormente?
¿Dónde está el sistema lineal con 3 incógnitas?

¿Dónde está el valor de la determinante $\begin{vmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$?

Razonamiento y demostración

13. Halla m para que el sistema tenga infinitas soluciones:

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - 3my = 2m + 3 \end{cases}$$

A) 3 B) 0 C) –3
D) 5 E) 1

14. Si el siguiente sistema es compatible indeterminado:

$$\begin{cases} (a - 3)x + (b - 2)y = 8 \\ (a + 1)x + (b + 4)y = 24 \end{cases}$$

calcula: $a + b$

A) 1 B) 2 C) 5
D) 10 E) 15

15. Calcula: $x + z - y$

$2x + y = 17$
$z + 2y = 23$
$x + 2z = 23$

A) 10 B) 7 C) 6
D) 13 E) 8

16. ¿Cómo debe ser la dependencia entre a y b para que el sistema tenga solución única?

$x + y = 3$
$ax + by = 5b$
$5x - 3y = 7$

A) $3a = 5b$ B) $a = b$ C) $b = 2a$
D) $3b = 5a$ E) $a = 2b$

17. ¿Para qué valores de m y n el sistema tiene infinitas soluciones, indica el valor de m + n?

$$3x - my = 1$$
$$5x - (2m + 1)y = n - 1$$

A) $-\frac{1}{3}$ B) $-\frac{3}{4}$ C) $-\frac{6}{7}$
D) $-\frac{8}{3}$ E) $-\frac{10}{3}$

18. Halla a – b para que el sistema tenga infinitas soluciones.

$$\begin{cases} (a - 3)x + ay = 12 \\ 3x - 5by = 18 \end{cases}$$

A) 17/3 B) 18 C) 15
D) 24/7 E) 13/2

19. Calcula el valor de n para que el sistema no tenga solución única.

$$nx + y + z = 1$$
$$x - y + z = 2$$
$$x + y + nz = -1$$

A) $-3 \vee 1$ B) $-3 \vee 2$ C) $-3 \vee -1$
D) $3 \vee 1$ E) $1 \vee -1$

Resolución de problemas

20. Sea el sistema:

$$3nx + 6y = -2$$
$$2x - ny = -1$$

Halla los valores de n para que las soluciones del sistema pertenezcan a la región definida por:

$E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq 0 / y \geq -1/3\}$

A) $n \geq 1$ B) $n \leq 3$ C) $n \geq 0$
D) $n \geq 6$ E) $n \leq 10$

21. Un obrero trabajó durante 2 meses con su hijo en una misma fábrica. El primer mes por 14 días del padre y 24 del hijo recibieron S/.118, el segundo mes por 21 días del padre y 19 del hijo recibieron S/.143. ¿Cuál es la diferencia de jornales diarios del padre y del hijo?

A) 3 B) 1 C) 4
D) 5 E) 2

NIVEL 3

Comunicación matemática

22. Relaciona los sistemas de ecuaciones con su respectivo conjunto solución (CS).

I. $2x + \frac{y-2}{5} = 21$; $4y + \frac{x+4}{6} = 29$ — CS = {(10; 7)}

II. $2x + \frac{y-2}{5} = 21$; $4y + \frac{x+4}{6} = 29$ — CS = {(0; 0)}

III. $2x + \frac{y-2}{5} = 21$; $4y + \frac{x+4}{6} = 29$ — CS = {(8; 6)}

IV. $2x + \frac{y-2}{5} = 21$; $4y + \frac{x+4}{6} = 29$ — CS = {(10; 6)}

V. $2x + \frac{y-2}{5} = 21$; $4y + \frac{x+4}{6} = 29$ — CS = {(10; 7)}

23. Lenguaje
Las letras mostradas están desordenadas; ordénalas para formar palabras; en cada grupo sobra una letra, anótala en la columna de la derecha.

	Palabras correctas	Letra que sobra
AAÓGUNIICLP		
SSTTÓNUUCXII		
ZCUDERÓNIC		
EAMILBOCRTP		
TENTYNOCSIENSI		
INUCSSEJLOO		
MTSSEAAI		
SEBICAUNOCE		
TIDGCISANON		

Razonamiento y demostración

24. Si el siguiente sistema tiene mas de una solución, halla la suma de los valores de m, si m es único.

$(m-1)x - (m-2)y = 3$

$(m+1)x - (m-1)y = m+3$

A) 1 B) 3 C) 2
D) 14 E) 0

25. Halla la suma de los valores de n para que el sistema homogéneo tenga soluciones diferentes a la trivial.

$$(1-n)x + y - z = 0$$
$$2x - ny - 2z = 0$$
$$x - y - (n+1)z = 0$$

A) 2 B) –2 C) 1 D) 0 E) –1

26. El sistema tiene solución única, indica el valor de a.

$$ax + y = 3$$
$$2x + ay = 4$$
$$2ax - 3y = 1$$

A) –2 B) 1 C) 2 D) 3 E) –3

27. Resuelve el sistema:

$$\frac{1}{\sqrt{x-y}} - \frac{1}{\sqrt{x+y}} = \frac{2}{15}$$

$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = \frac{8}{15}\sqrt{x^2-y^2}$. Indica el valor de y.

A) 17 B) 8 C) 15 D) 25 E) 4

28. Resuelve el sistema:

$$\frac{x+y-1}{x-y+1} = a; \ \frac{y-x+1}{x-y+1} = ab$$

e indica el valor de x.

A) a + 1 B) ab + 1 C) ab – 1
D) $\frac{a+1}{ab+1}$ E) ab + 2

29. Halla la diferencia entre (x + y) máximo y (x + y) mínimo, luego de resolver el sistema:

$2x^2 + 5xy - 10y^2 = 0$

$12y^2 - xy - 72 = 0$

A) 2 B) 12 C) 18 D) –6 E) 0

Resolución de problemas

30. Tres amigos de los cuales uno de ellos está con su motocicleta que desea llevarlos a través de una distancia MN = 44 km. Partiendo los tres al mismo tiempo, lo primero que hace es llevar a uno de ellos hasta un cierto tramo, lo deja para que continué corriendo y va a recoger a su otro amigo. El motociclista va a una velocidad de 45 km/h mientras el amigo a 18 km/h. Determina la distancia que recorrió el motociclista comprendida desde el momento en que deja hasta recoger a su otro amigo.

A) 1 km B) 19 km C) 17 km D) 12 km E) 13 km

Claves

NIVEL 1
1. C **2.** E **3.** A **4.** A **5.** E **6.** D **7.** C **8.** B **9.** C **10.** A

NIVEL 2
11. D **12.** **13.** C **14.** D **15.** B **16.** E **17.** A **18.** E **19.** A **20.** C **21.** A

NIVEL 3
22. **23.** **24.** B **25.** A **26.** C **27.** B **28.** D **29.** B **30.** D



Aplicamos lo aprendido



TEMA 4: ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO PLANTEO DE ECUACIONES

1 Resuelve e indica la menor raíz, en:
$(2x-1)^2 = -(x-2)$

A) $-\frac{1}{5}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{3}$ D) $-\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

2 Si el producto de raíces es igual a la unidad, halla m, en:
$(m+1)x^2 - \sqrt{2}\,x + 2(m-1) = 0$

A) –1 B) –3 C) –2 D) 3 E) 2

3 Para la ecuación:
$(a-13)x^2 - 7(a-1)x + (11-a) = 0$
halla **a**, si las raíces son recíprocas.

A) 12 B) –12 C) 6 D) –6 E) 1

4 Resuelve: $3x^2 - 2x + 1 = 0$

A) $\left\{\frac{1+\sqrt{-2}}{3}; \frac{1-\sqrt{-2}}{3}\right\}$ B) $\left\{\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{\sqrt{-2}}{3}\right\}$

C) $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{\sqrt{-2}}{3}\right\}$ D) $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{1-\sqrt{2}}{3}\right\}$

E) $\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{4}; \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right\}$

5 Determina **k** de manera que la ecuación tenga única solución:
$2kx^2 - 6x + 9 = 0;\ k \neq 0$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) –1

D) $-\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

6 Resuelve: $\frac{4x^2 - 3x + 5}{x^2 - 2x + 13} = 2$

A) {–7; 3} B) {–3; 2} C) {–7; 2}
D) {–2; 3/7} E) {3; –7/2}

7 Indica el producto de raíces de la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{2x-5}=\frac{x-2}{x-1}$$

A) $\frac{11}{2}$ B) $\frac{9}{2}$ C) $\frac{7}{2}$ D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

8 Si las ecuaciones en x:

$30x^2+nx+3m=0 \ \wedge \ 2x^2+5x+n=0$

tienen el mismo conjunto solución, halla: $m-n$

A) 100 B) 103 C) 303 D) 300 E) 200

9 Halla **k**, si la ecuación $x^2-(k+2)x+2k=0$, tiene raíces iguales.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10 Halla **m**, si las raíces de la ecuación son recíprocas:

$(2m-5)x^2+(8m-4)x+3m-4=0$

A) –1 B) –2 C) –3 D) –4 E) –5

11 Halla **a**, si las raíces de la ecuación son simétricas:

$(6a-2)x^2+(5a-4)x+(8a-1)=0$

A) 4 B) 5 C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{5}{4}$ E) $-\frac{4}{5}$

12 Si $k>0$, indica la menor solución de: $36x^2-12x+1=k^2$

A) $\frac{k}{6}+1$ B) $\frac{k}{6}-1$ C) $\frac{1-k}{6}$

D) $\frac{k+1}{6}$ E) $\frac{k}{6}$

13 Calcula **a**, de tal manera que las ecuaciones sean equivalentes:

$(5a-2)x^2-(a-1)x+2=0$

$(2b+1)x^2-5x+3=0$

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{7}{3}$ D) $\frac{13}{3}$ E) $\frac{11}{3}$

14 Calcula **c**, tal que la ecuación: $3x^2-10x+c=0$ tenga sus dos raíces positivas.

A) $c\in\langle 0; 25]$ B) $c\in\langle 0; 25/3]$

C) $c\in\langle 0; 25\rangle$ D) $c\in\langle 0; +\infty\rangle$

E) $c\in\langle 0; 25\rangle$



Claves

1. D 3. A 5. B 7. A 9. B 11. C 13. D

2. D 4. A 6. E 8. D 10. A 12. C 14. B

Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Verifica si es correcto (C) o incorrecto (I) el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

I. $5x^2 - 20x = 0$ CS = {0; 4} ( )
II. $3x^2 - 27 = 0$ CS = {–3; –3} ( )
III. $x^2 - x - 12 = 0$ CS = {–3; 4} ( )
IV. $7x^2 - 21x = 0$ CS = {–3; 0} ( )

2. Luego de resolver la ecuación:

$\dfrac{(x-1)^2 + (x-4)^2 - 17}{(x-1)^2 + (x-2)^2 + 15} = -1$, tiene raíces:

I. Reales distintas.
II. Reales iguales.
III. Reales racionales fraccionarias.
IV. Reales irracionales fraccionarias.
V. Complejas conjugadas.

Razonamiento y demostración

3. Indica una raíz de:

$14 - \sqrt{16 - x^2} = x^2;\ x \in \mathbb{R}$

A) –3 B) 4 C) –7 D) $\sqrt{5}$ E) $2\sqrt{3}$

4. En la siguiente ecuación: $2x + 8x^2 = 4x + 5$, indica la suma de raíces.

A) $\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) $\frac{6}{3}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $-\frac{4}{3}$

5. Sea la ecuación $x^2 - 3x - 6 = 0$, halla: $x_1^2 + x_2^2$

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

6. Dada la ecuación:

$(m + 1)x^2 + 5x + (2m - 1) = 0$
el producto de raíces es 5/3. Halla m.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) –4

7. Halla k, si las raíces de la ecuación son simétricas:
$8x^2 + 6(k - 7)x + 6 = 0$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

8. Sean x_1 y x_2, las raíces de la ecuación:
$3x^2 + 7x + 2k = 0$
Calcula k, si: $(x_1 + 3)(x_2 + 3) = 6$

A) 6 B) 8 C) –6 D) –3 E) 4

9. Si: $x^2 - nx + 36 = 0$, admite como raíces a:
$x_1; x_2$, tal que: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{5}{12}$; encuentra el valor de n.

A) 25 B) 16 C) 12 D) 24 E) 15

Resolución de problemas

10. Calcula la suma de los valores de n, si una raíz es el doble de la otra, en:
$2nx^2 + 3x + n = 0$

A) 1 B) 0 C) 2 D) –1 E) –2

11. Problema con datos numéricos:
Determina la medida del lado de un cuadrado si una de sus diagonales mide 1 cm más que la medida de un lado.

A) $(1 + \sqrt{2})$ cm B) $(\sqrt{2} - 1)$ cm C) 5 cm
D) 1 cm E) $(\sqrt{3} + 1)$ cm

NIVEL 2

Comunicación matemática

12. Para la ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0;\ a \neq 0$ cuya discriminante se define: $\Delta = b^2 - 4ac$, verifica la verdad o falsedad, en cada caso:
( ) Si: $\Delta > 0$; las raíces serán reales iguales.
( ) Si: $\Delta < 0$; no hay raíces iguales
( ) Si: $\Delta = 0$; las raíces serán reales distintas.

A) VFV B) FFV C) FVF
D) VVF E) FFF

13. De las siguientes ecuaciones, plantea sus respectivos enunciados matemáticos:

- $x^2 - 2x - 63 = 0$
- $2x(x - 31) + x - 31 = 0$
- $x(x - 1) = 18x + 372$
- $\frac{3x^2}{2} + 1 = -\frac{7x}{2}$
- $11x(x - 1) = 9x^2 + 21$
- $10x = 3 + \frac{1}{x}$

Razonamiento y demostración

14. Si k > 0, indica la mayor solución de:
$64x^2 - 16x + 1 = k^2$

A) $\frac{k}{8} + 1$ B) $\frac{k}{8} - 1$ C) $\frac{1-k}{8}$
D) $\frac{k+1}{8}$ E) $\frac{k}{8}$

15. Si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación:

$3x^2 + 2x - 4 = 0$

Halla el valor de $(x_1 + 5)(x_2 + 5)$.

A) $\frac{61}{4}$ B) $\frac{61}{5}$ C) $\frac{61}{3}$
D) $\frac{61}{7}$ E) $\frac{61}{9}$

16. Si m y n son raíces de: $3x^2 - 2x + 1 = 0$, halla:

$R = \frac{m}{n} + \frac{n}{m}$

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $-\frac{3}{2}$
D) $-\frac{1}{3}$ E) $-\frac{2}{3}$

17. Resuelve: $\frac{x+1}{x-1} = \frac{3x-1}{x+1}$

Indica una de las raíces.

A) 1 B) –1 C) 2
D) 3 E) 8

18. Halla el valor de n, si la ecuación:
$2nx^2 + 4nx + n = 5x^2 - 7x - 1$, tiene raíces recíprocas.

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 10

19. Sea la ecuación: $(3m - 2)x^2 - (5m + 2)x + 4m - 1 = 0$
Donde $x_1 \cdot x_2 = \frac{11}{7}$. Halla el valor de m.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

20. Las raíces de la ecuación: $2x^2 - (a - 3)x + 3 = 0$
son m y n; calcula **a** si:
$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 2$

A) 8 B) 16 C) 3
D) 4 E) 9

Resolución de problemas

21. Si n es un número racional, de modo que la ecuación $x^2 - (3n - 2)x + (n^2 - 1) = 0$ tiene sus raíces en la relación de 1 a 3, calcula la suma de todos los valores de n.

A) $\frac{29}{14}$ B) $\frac{37}{12}$ C) $\frac{39}{12}$
D) $\frac{36}{11}$ E) $\frac{37}{11}$

22. **Problema con datos numéricos:**
Un grupo de amigos se ponen de acuerdo para hacer un viaje en una camioneta cuyo alquiler es de 4000 soles. A última hora dos de ellos deciden no viajar, por ende cada uno de los restantes paga 100 soles más. Determina el número de amigos que se van de viaje y cuánto paga cada uno.

A) 5; S/.200 B) 7; S/.1000 C) 7; S/.600
D) 4; S/.1200 E) 8; S/.600

NIVEL 3

Comunicación matemática

23. Examen de admisión UNI 2001-I (matemática I)
Analiza, luego según la proposición responde si es correcto (C) o incorrecto (I):
De las ecuaciones equivalentes:

$3\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} = 10$ y $ax^2 + bx + \frac{1}{2} = 0$

Podemos afirmar que:

A) $a + b = -\frac{73}{18}$ ( )

B) Una de las raíces es 9. ( )

C) Una de las raíces es recíproca de la otra. ( )

D) $a - b = -\frac{73}{18}$ ( )

24. Elige la ecuación que representa correctamente el enunciado del problema que nos permitirá solucionarlo.
Determina la capacidad de un depósito lleno de Benceno (C_6H_6) puro, del cual se ha extraído dos veces 10 L reponiéndose en cada caso con idéntico volumen de H_2O y resultando únicamente C_6H_6 al 83,25%.

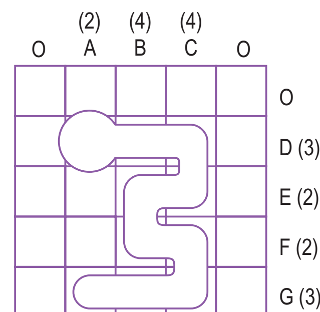
I. $\frac{x^2}{x-10} = 83{,}25\% (x - 10)$

II. $\frac{(x-10)^2}{x} = 83{,}25\% (x + 10)$

III. $\frac{(x-10)^2}{x} = 83{,}25\% x$

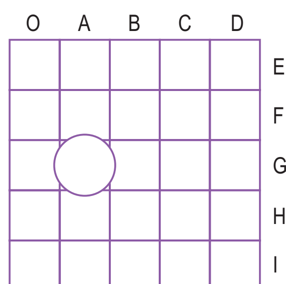
IV. $\frac{(x+10)^2}{x} = 83{,}25\% x$

25. En la cuadrícula hay oculto un gusano que ocupa exactamente diez casillas. Una de las soluciones de las ecuaciones cuadráticas muestra el número de casillas ocupadas que hay en cada fila o columna. Fíjate el ejemplo mostrado:



A: $2x^2 - 2x - 4 = 0$; B: $3x^2 - 11x - 4 = 0$
C: $5x^2 - 19x - 4 = 0$; D: $2x^2 - 7x + 3 = 0$
E: $x^2 - 4 = 0$ F: $3x^2 - 5x - 2 = 0$
G: $2x^2 - 4x - 6 = 0$

Determina dónde se encuentra el gusano en la cuadrícula inferior. Te facilitamos la posición de la cabeza.



A: $3x^2 - x - 2 = 0$;	B: $x^2 - x - 6 = 0$
C: $2x^2 - 7x - 4 = 0$;	D: $3x^2 - 7x + 2 = 0$
E: $10x^2 - 15x - 10 = 0$	F: $4x^2 + 20x - 56 = 0$
G: $2x^2 + x - 21 = 0$	H: $x^2 + 9x - 22 = 0$
I: $x^2 + 8x - 9 = 0$	

Razonamiento y demostración

26. Resuelve en $\mathbb{R}$, la ecuación:

$5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0$

Halla: $xy + x + y$

A) –1 B) 1 C) 0
D) –2 E) 10

27. Encuentra el valor de m para que una raíz sea el doble de la otra.

$x^2 + 9x + m = 0$

A) 16 B) 17 C) 18
D) 19 E) 20

28. En la siguiente ecuación: $3x^2 - 3x + 6 = 0$, las raíces son x_1 y x_2.
Halla: $x_1^2 + x_2^2$

A) –1 B) –2 C) –3
D) –4 E) –5

29. Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación:

$(m + 3)x^2 - (m - 2)x + m + 3 = 0$, donde: $x_1 + x_2 = \frac{3}{8}$.

Indica el valor de m.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

30. Si m y n son las dos raíces de la ecuación:

$x^2 - 2x + 2 = 0$

calcula: $E = m^{m+n} . n^{mn}$

A) 2 B) –4 C) 1
D) 2 E) 4

31. Resuelve la ecuación: $(n - 2)x^2 - (2n - 1)x + n - 1 = 0$, sabiendo que el discriminante es 25.

A) {–3; 1/2} B) {3; –1/2} C) {3; 1/2}
D) {–3; –1/2} E) {–1/2; 1/2}

32. Dada la ecuación:

$4x^2 - 4(p + 3)x + p^2 + 4 = 0$

Calcula p, tal que presente una raíz doble.

A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{5}{6}$ C) $-\frac{3}{4}$
D) $-\frac{2}{5}$ E) $-\frac{5}{3}$

33. Del problema anterior, halla p tal que las raíces sean recíprocas.

A) 10 B) 0 C) 1
D) 2 E) 20

Resolución de problemas

34. Halla el mayor valor de **a** en la ecuación:

$x^2 - (2a + 4)x + a^2 + 8 = 0$

si una raíz es el triple de la otra.

A) 11 B) –11 C) 12
D) –12 E) 10

35. Problema de datos numéricos:
Examen final CEPREUNI CONCURSO 2001-I
Un grupo de personas que asistieron a una reunión se dieron la mano, uno de los asistentes observó que los apretones de mano fueron 465 (incluido los dados por él mismo). Determina el número de personas que asistieron a la reunión.

A) 39 personas B) 29 personas C) 31 personas
D) 41 personas E) 51 personas

Claves

NIVEL 1	**8.** A	**15.** C	NIVEL 3	**30.** E
1.	**9.** E	**16.** E	**23.**	**31.** C
2.	**10.** B	**17.** D	**24.**	**32.** B
3. E	**11.** A	**18.** C	**25.**	**33.** B
4. A	NIVEL 2	**19.** C	**26.** A	**34.** E
5. B	**12.** C	**20.** E	**27.** C	**35.** C
6. D	**13.**	**21.** D	**28.** C	
7. E	**14.** D	**22.** E	**29.** E	

Aplicamos lo aprendido





TEMA 5: ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR

1 Resuelve la ecuación:

$3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0$

A) $\left\{\frac{1}{3}; 1; 3\right\}$ B) $\left\{1; \frac{2}{3}; 3\right\}$ C) $\left\{\frac{1}{3}; 2; 3\right\}$

D) $\left\{1; \frac{3}{2}; 3\right\}$ E) $\left\{\frac{1}{2}; 2; 3\right\}$

2 Forma la ecuación de menor grado posible con raíces: 2; 5 y 3.

A) $x^3 + 10x^2 - 30x + 60 = 0$

B) $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$

C) $x^3 + 31x^2 - 30x - 60 = 0$

D) $x^3 + 62x - 20x^2 - 60 = 0$

E) $x^3 + 12x^2 - 15x - 30 = 0$

3 Halla el valor de **a**, en:

$ax^3 + (2a + 1)x^2 + 3ax + 2 = 0$

Si sus raíces r_1; r_2; r_3 verifican: $r_1^{-1} + r_2^{-1} + r_3^{-1} = 6$

A) 4 B) –4 C) –2 D) 2 E) 5

4 Resuelve la siguiente ecuación:

$x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 26x - 24 = 0$

e indica el producto de la mayor raíz con la menor raíz.

A) 8 B) –5 C) –8 D) 6 E) –6

5 Si la ecuación: $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$;
($a; b; c \in \mathbb{Q}$) admite por raíces a $3 - \sqrt{5}$ y 4,
calcula: $a + b + c$.

A) 52 B) 54 C) 50 D) 58 E) 60

6 Si $1 + \sqrt{3}$ es una raíz de $x^3 + ax^2 + bx + 4 = 0$ con a, $b \in \mathbb{Q}$, halla (a . b)

A) –8 B) –6 C) –4 D) 8 E) 6

7 Resuelve la ecuación:

$x^4 - 29x^2 + 100 = 0$

Indica la menor raíz.

A) -2 B) 5 C) -5 D) -1 E) 2

8 Sea el polinomio $P(x) = x^3 - 2x - 5$; podemos afirmar que una de sus raíces se encuentra en el intervalo:

A) $\langle -1; 0\rangle$ B) $\langle 0; 1\rangle$ C) $\langle 1; 2\rangle$
D) $\langle 2; 3\rangle$ E) $\langle 3; 4\rangle$

9 Resuelve:

$x^5 - 6x^4 - 5x^3 + 30x^2 + 4x - 24 = 0$

e indica una raíz.

A) 5 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

10 Si una de las raíces de la ecuación polinomial de coeficientes racionales:

$P(x) = x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ es $1 + \sqrt[4]{2}$;

calcula: a . b . c

A) -24 B) -20 C) 24 D) 16 E) -16

11 Calcula la suma de las raíces positivas de la ecuación bicuadrada:

$4x^{n+1} - 20nx^2 + 3n^3 = 0$

A) $2\sqrt{6}$ B) $4\sqrt{6}$ C) $2\sqrt{3}$
D) $3\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{3}$

12 Sean a; b; c raíces reales de:

$x^3 + x + mn = 0$

Determina: $H = \dfrac{(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 + 6abc}{abc}$

A) 5 B) 7 C) 3 D) 0 E) 6

13 Resuelve: $9x^4 + 16 = 0$; e indica el número de raices en $\mathbb{C}$.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

14 Si una de las raíces de la ecuación:

$3x^3 - 18x^2 + ax - 60 = 0$ $(a \in \mathbb{R})$

es la media aritmética de las otras 2, calcula la suma de las inversas de estas 2 raíces.

A) 1/5 B) 2/5 C) 3/5 D) 4/5 E) 1



Claves

1. A	3. B	5. B	7. C	9. D	11. A	13. E
2. B	4. C	6. A	8. D	10. C	12. C	14. B



Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Completa y marca la alternativa adecuada.

I. Los coeficientes de una ecuación polinomial pertenecen a ________________.

II. Si P(a) = 0, entonces a es ________________ de la ecuación polinómica.

III. Si $(x - k)^2$ es factor del plinomio P(x); k es raíz de multiplicidad ________________.

IV. Si el polinomio de grado $n \geq 3$ posee una raíz irracional, $a - \sqrt{b}$, entonces la raíz conjugada irracional es ________________.

V. El polinomio de coeficientes en $\mathbb{R}$ tiene una raíz imaginaria $-a - bi$, entonces su raíz conjugada imaginaria es: ________________.

A) Reales / raíz / dos / a + b / a + bi
B) Complejos / solución / uno / a – b / a – bi
C) Complejos / raíz / dos / $b - \sqrt{a}$ / –a + bi
D) Complejos / raíz / dos / $a + \sqrt{b}$ / –a + bi
E) Reales / solución / uno / $b - \sqrt{a}$ / –a + bi

2. Relaciona correctamente:

$x^3 + 5x^2 + m = 0$	Ecuación trinomia.
$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$	Presenta 7 raíces.
$7x^5 + 3x^3 + x^2 + x - 6 = 0$	Tiene como suma de raíces –5.
$7x^6 - x^3 + 9 = 0$	Ecuación recíproca.
$x^7 + 2x^6 + 2x^3 = 0$	Tiene a 6/7 como producto de raíces.

Razonamiento y demostración

3. La ecuación: $x^3 - 3x^2 + 4x + 28 = 0$ admite a (–2) como raíz. Las otras raíces satisfacen la ecuación:

A) $x^2 - 6x + 14 = 0$ B) $x^2 - 7x + 14 = 0$
C) $x^2 - 5x + 14 = 0$ D) $x^2 - 7x + 15 = 0$
E) $x^2 - 4x + 14 = 0$

4. Resuelve e indica una raíz de: $3x^3 - 5x^2 + x - 6 = 0$

A) –2 B) $\frac{-1-\sqrt{35}\,i}{6}$ C) $\frac{-1-\sqrt{35}}{6}$
D) $\frac{-1+\sqrt{35}\,i}{3}$ E) $\frac{-2-\sqrt{35}\,i}{6}$

5. Sea la ecuación: $x^3 - 7x^2 + mx + n = 0$

Donde: x_1; x_2; x_3 raíces de la ecuación.

Determina x_3; si: $x_1 + x_2 = 3$

A) 3 B) 1 C) m
D) n E) 4

6. Forma la ecuación bicuadrada, si la suma de productos de sus raíces dos a dos es – 3/2 y el producto de las mismas es –20.

A) $2x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 20 = 0$ B) $x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 40 = 0$
C) $2x^4 - 3x^2 - 40 = 0$ D) $2x^4 - x^2 - 40 = 0$
E) $x^4 - x^2 - 20 = 0$

7. Determina el valor de A + B,
si: $x^4 + Ax^3 + Bx^2 - x = 0$ admite a 1 como raíz.

A) 0 B) 1 C) –1
D) 2 E) 3

8. Al resolver la ecuación:

$12x^4 - 4x^3 - 41x^2 - 4x + 12 = 0$

su CS es: $\left\{-\frac{m}{n}; -\frac{n}{m}; \frac{1}{a}; a\right\}$; $(m < n)$

Calcula: $m^2 + n^2 + a^2$

A) 14 B) 15 C) 16
D) 17 E) 18

9. Con respecto al polinomio:
$P(x) = x^3 + 4x^2 - 4$
podemos afirmar que una de sus raíces se encuentra en el intervalo:

A) $\langle 0; 1\rangle$ B) $\langle 1; 2\rangle$ C) $\langle -1; 0\rangle$
D) $\langle 2; 3\rangle$ E) $\langle 7; 9\rangle$

Resolución de problemas

10. Sean x_1; x_2 y x_3 las raíces de la ecuación:
$x^3 + 4ax + b - 2004 = 0$; $a < 0$
Además: $x_2 - x_1 = x_3 - x_2$.
Da como respuesta una de sus raíces.

A) 2004 B) $\sqrt{-a}$ C) $-2\sqrt{-a}$
D) 2a – 1 E) $2\sqrt{a}$

11. Se sabe que las raíces de la ecuación:
$x^3 - 12x^2 + ax - 28 = 0$; están en progresión aritmética. Halla a.

A) 39 B) 24 C) 20
D) 16 E) 22

NIVEL 2

Comunicación matemática

12. Identifica la premisa incorrecta:

A) Sea $P(x) = ax^5 + bx^4 + bx + a$
Si $P(m) = 0 \Rightarrow$ 1/m es raíz de P(x).

B) La suma de productos de raíces dos a dos de
$P(x) = 3x^4 - 6x^3 - 12x^2 + 3x + 10 = 0$ es: –4

C) Si $\left(x - 2 + \sqrt{3}\right)$ es factor de una ecuación polinómica;
$\Rightarrow \left(-2 - \sqrt{3}\right)$ es una raíz de dicha ecuación.

D) $(x - 3)^6 = 0$; tiene una solución y 6 raíces.

E) $x^3 - 2 = 0$; posee 2 raíces imaginarias.

13. Completa los pasos para resolver la siguiente ecuación:
Indica qué condición debe cumplir a y b, donde a; b $\neq$ 0, para que las raíces de la siguiente ecuación:
$ax^5 + (b - ac)x^4 - bcx^3 - bx^2 - (a - bc)x + ac = 0$, sean todas reales.
Dato: **c** es raíz de la ecuación, $c \in \mathbb{R}$.

Resolución:

- Si x = c es raíz, dividimos aplicando Ruffini:

						ac
c		ac	bc			
	a					0

$\Rightarrow P(x) = (x - c)(\qquad\qquad - a)$
Posee una raíz = 1

Aplicamos Ruffini, factor (x – 1):

$\Rightarrow P(x) = (x - c)(x - 1)(\qquad\qquad)$
Posee una raíz = –1

Aplicando Ruffini, factor (x + 1):

$\Rightarrow P(x) = (x - c)(x - 1)(x + 1)(\qquad\qquad)$
$\Delta \geq 0$
Como observamos 3 raíces en $\mathbb{R}$, las otras 2 también deben ser reales.

$b^2 - \qquad$

$\therefore |\qquad| \geq 2|\qquad|$

Razonamiento y demostración

14. Si x_1; x_2; x_3 son raíces de:
$x^3 + ax + b = 0$
Además: $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = x_1 + x_2$; indica la relación entre a y b.

A) $a^2 + b^2 + 1 = 0$
B) $a + b^2 + 1 = 0$
C) $a^2 - b^2 + 1 = 0$
D) $a^3 + b - 1 = 0$
E) $a^3 - b + 1 = 0$

15. Si x = c; es una raíz de la ecuación:
$4x^3 + (3b - 12 - 4c)x^2 + (13c - 3bc)x - c^2 = 0$,
calcula el valor de c, si las otras raíces son recíprocas.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

16. Si a y b son raíces imaginarias de la ecuación:
$2x^3 - 3x^2 + 3x - 10 = 0$
calcula: $M = a^2b + ab^2$

A) 3/4
B) 4/3
C) 5/3
D) –5/3
E) –5/4

17. Encuentra el valor de k en la ecuación bicuadrada:
$(5k^2 + 2)x^4 - (4k^4 + 9)x^2 + 3(k^2 + 2) = 0$
si el producto de raíces es 1.

A) $\pm\sqrt{3}$
B) ± 3
C) ± 1
D) ± 2
E) $\pm\sqrt{2}$

18. La ecuación: $x^3 - 7x - 2 = 0$
Admite como solución a:$\{x_1; x_2; x_3\}$
Determina:
$$H = \frac{1}{x_1 + 2} + \frac{1}{x_2 + 2} + \frac{1}{x_3 + 2}$$

A) 7
B) 2
C) –5/4
D) 1/3
E) – 1/2

Resolución de problemas

19. Si la ecuación:
$16x^4 - 32x^3 + 72x^2 + mx + n = 0$
m; n $\in \mathbb{R}$ admite dos raíces imaginarias de multiplicidad dos, determina m + n.

A) 0
B) 2
C) –6
D) 64
E) –7

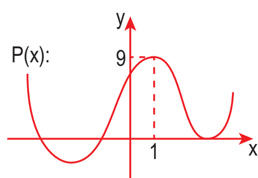
20. Sean a, b y c; raíces de la ecuación:
$x^3 + 2x + 2 = 0$
Forma una ecuación cúbica en "y" de raíces:
$\frac{b}{c} + \frac{c}{b}; \frac{c}{a} + \frac{a}{c}; \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

A) $y^3 + 3y^2 + 5y + 5 = 0$
B) $y^3 - 3y^2 - 5y + 5 = 0$
C) $y^3 - 3y^2 + 5y - 5 = 0$
D) $y^3 - 3y^2 - 5y - 5 = 0$
E) $y^3 + 3y^2 + 5y - 5 = 0$

NIVEL 3

Comunicación matemática

21. Con respecto a la siguiente gráfica del polinomio P(x) de grado 6:



Responde:

- n.° de raíces reales: ______________
- n.° de raíces imaginarias: ______________
- n.° de raíces reales de multiplicidad 2: ______________
- Suma de los coeficientes del polinomio: ______________
- n.° de soluciones en $\mathbb{R}$: ______________
- n.° de raíces reales negativos: ______________

22. Sea la ecuación polinomial compleja:

$P(x) = ix^3 + 3x^2 - 3ix + 2 = 0$

Indica el valor de verdad de las proposiciones:

I. Posee solo una raíz real.
II. Posee 3 raíces imaginarias.
III. Posee 2 raíces reales y 1 imaginaria.

A) FFF B) VFF C) VVF
D) FVF E) VVV

23. De la ecuación polinomial: $x^4 - x - 3 = 0$: se afirma:

I. Tiene dos raíces reales positivas.
II. Si: x_1 y x_2 son dos de sus raíces reales, positiva y negativa, respectivamente, entonces:
$\left|\frac{x_1}{x_2}\right| > 1$
III. La raíz positiva se localiza en $\left\langle 1; \frac{3}{2}\right\rangle$.

A) VVV B) VFV C) FFV
D) FVV E) FFF

Razonamiento y demostración

24. Sea la ecuación:

$x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$; si hacemos:

$z = \frac{1}{x} + x$; entonces la ecuación en z será:

A) $2z^2 - z + 6 = 0$ B) $xz^2 - \frac{z}{x} - 6 = 0$
C) $x^2(z^2 - z - 8) = 0$ D) $x^2(z^2 + z - 6) = 0$
E) $z^2 + z - 6 = 0$

25. Indica entre qué valores se encuentra x,
si: $x^4 - 6x^3 - 144 < 7x^2 - 96x$; $x \in \mathbb{R}$

A) $\langle -3; 3\rangle$ B) $\langle 3; 4\rangle$ C) $\langle -3; 4\rangle$
D) $\langle -4; 3\rangle$ E) $\langle -4; 4\rangle - \{3\}$

26. Si la ecuación $x^3 + x^2 - 1 = 0$ tiene por CS = {a; b; c}
Halla el valor de:

$$M = \frac{a\sqrt{-a}}{\sqrt{a^2 - bc}} + \frac{b\sqrt{-b}}{\sqrt{b^2 - ac}} + \frac{c\sqrt{-c}}{\sqrt{c^2 - ab}}$$

A) 1 B) –1 C) 3 D) 2 E) –2

Resolución de problemas

27. Sea $6x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - 12 = 0$
Posee 2 raíces imaginarias i y 1 + i.
Determina: $8a + 4b + 2c + d$

A) –62 B) 42 C) 2 D) –60 E) –36

28. Determina el coeficiente **a**, de tal modo que el número (–1) sea una raíz múltiple de orden no inferior a 2, del polinomio:
$f(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1$

A) 5 B) 6 C) –5 D) –6 E) 4

29. La ecuación:
$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$; $c \neq 0$
tiene 3 raíces distintas en progresión geométrica y cuyas inversas pueden ordenarse de modo que formen una progresión aritmética. Halla la relación entre a, b y c.

A) $b = ca^3$ B) $b^3 = ca$ C) $b^3 = ca^3$
D) $27a^3 = b^3c$ E) $b^3 = c^3a$

30. De la siguiente ecuación: $x^3 + 3x^2 + 5x + 8 = 0$
calcula la suma de las sextas potencias de sus raíces.

A) 25 B) 84 C) 122 D) 232 E) 212

31. Si las raíces: x_1, x_2, x_3, x_4; de la siguiente ecuación:
$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + 864 = 0$
son reales y positivas; además: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 48$
Da como respuesta la suma de raíces.

A) 3 B) 9 C) 17 D) 25 E) 36

Claves

NIVEL 1	7. A	13.	20. A	26. B
1. D	8. D	14. B	NIVEL 3	27. D
2.	9. A	15. D	21.	28. C
3. C	10. C	16. E	22. D	29. D
4. B	NIVEL 2	17. E	23. D	30. C
5. E	11. A	18. C	24. D	31. D
6. C	12. C	19. E	25. E	

MARATÓN Matemática

Determina cuál de las ecuaciones cuadráticas de coeficientes reales admite como una raíz a: $(1 - i\sqrt{3})$

Resolución:

Sabemos que si $1 - i\sqrt{3}$ es raíz de la ecuación,

$\Rightarrow 1 + i\sqrt{3}$ es la otra raíz.

Desarrollamos la ecuación:

$x^2 - Sx + p = 0$

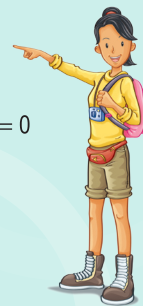
S: suma de raíces; p: producto de raíces

$x^2 - (1 - i\sqrt{3} + 1 + i\sqrt{3})x + (1 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3}) = 0$

La ecuación buscada es:

$x^2 - (2)x + 1 - 3i^2 = 0$ Recuerda: $i^2 = -1$

$\therefore x^2 - 2x + 4 = 0$



1. Dada la matriz: $H = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$

Determina: H^{2013}

A) $a^{2013} . H$ B) H C) I
D) $-a^{2013} . H$ E) $a^{2012} . H$

2. Determina el CS de:

$|x^2 - 9| = x + 3$

A) {–4; 3} B) {3; 4} C) {–3; 2; 4}
E) {–3; 2} E) {–3; 2; 3}

3. Si x_1 y x_2 son las raices de: $3x^2 - 6x - 5 = 0$

Determina: $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$

A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $-\frac{6}{5}$
D) $\frac{6}{5}$ E) $\frac{5}{3}$

4. Relaciona correctamente:

I. $n(x + 2) + \log x = 0$ ( ) Ecuación polinomial
II. $e^x + x^3 = 0$ ( ) Ecuación fraccionaria
III. $\dfrac{4}{x^{-1}} + \dfrac{1}{x} = 0$ ( ) Ecuación exponencial
IV. $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$ ( ) Ecuación logarítmica
V. $\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x + 1} = 0$ ( ) Ecuación irracional

5. En la siguiente matriz determina: $Traz(A) + Traz(A^T) + a_{32}$

$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

A) 13 B) 7 C) 8
D) 5 E) 10

6. Identifica la premisa falsa:

A) En una matriz involutiva de orden n se cumple: $A^n = I$

B) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow 3A = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 18 & 21 \end{pmatrix}$

C) De la premisa anterior det(A) = 3.

D) $\det(A) = \det(A^T)$

E) Si: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2$; entonces: $\begin{vmatrix} 2 + a & b \\ 2 + c & d \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & d \\ 1 & b \end{vmatrix} = 2$

A) A B) B C) D
D) C E) E

7. Sea B una matriz nilpotente y A una matriz idempotente, determina $A^4 + B^{n+4}$; A y B son de orden $n \times n$.

A) B B) A C) A + B
D) 0 E) I

8. Determina un valor de x, si det(A) = 10.

$A = \begin{pmatrix} x^2 & -x \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

A) 1 B) 2 C) 0
D) 4 E) –2

9. Determina el complemento del CS de:

$(|x - 1| + 2)^{3x^2 + 5x - 30} > (|x - 1| + 2)^{15 - x}$

A) $\langle -3; 5 \rangle$ B) $\langle 5; +3 \rangle$ C) $\langle 3; +3 \rangle$
D) $[-5; 3]$ E) $\langle -5; 3 \rangle$

10. Resuelve el determinante e indica el CS de x.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} < 0$$

A) $\langle 0; 2]$ B) $[0; 3]$ C) $\langle 1; 2 \rangle$
D) $\langle -1; 2 \rangle$ E) $\langle 0; 2 \rangle$

Unidad 4

RECUERDA

Teoría de probabilidades

La teoría de probabilidades debe más a Laplace que a ningún otro matemático. Desde 1774 escribió muchos artículos sobre el tema y los resultados obtenidos los incorporó y organizó en su obra Teoría analítica de las probabilidades publicada en 1812. Sin embargo, el primero de los resultados teóricos en esta rama fue, al parecer, la demostración realizada por Moivre en 1730 del teorema local del límite central.

El problema del cálculo de probabilidades sobre la base de observaciones en diferentes aspectos, también fue tratado por D. Bernoulli, Euler, Simpson y Condorcet, siendo uno de los resultados más importantes las fórmulas de Bayes publicadas en 1764. Junto a esto Legendre, Laplace y Gauss elaboraron el método de mínimos cuadrados. Todo el aparato matemático que permitió desarrollar la teoría de probabilidades está extraído del análisis combinatorio, disciplina iniciada por Leibniz y Bernoulli. Posteriormente se introdujo la teoría de límites disminuyendo el peso específico de los métodos combinatorios.

Reflexiona

- *Cuando sus metas personales coinciden con las de otro, el poder del trabajo en común no solo le beneficia a usted, sino que tal cooperación también crea un efecto sinérgico que le permite conseguir más que la simple suma de sus esfuerzos individuales.*
- *Una alianza magistral surge cuando dos o más personas trabajan juntas en perfecta armonía por la consecución de un propósito común.*
- *Recuerda que el éxito es el resultado de las buenas decisiones.*
- *¡Decídete sin miedo a lograr el éxito y él te alcanzará pronto!*

¡Razona...!

En el cuadrado mágico faltan cinco números, y la suma de los tres números en cada fila, en cada columna y en cada diagonal es la misma. ¿Cuál es el valor de la letra A?

15		35
50		
25	A	

A) 50 B) 40 C) 30 D) 20 E) 10

Aplicamos lo aprendido




TEMA 1: INECUACIONES

1 Sea: $f(x) = x^2 - 6x + 11$,
tal que: $f(x) \geq k$; $\forall\ x \in \mathbb{R}$
Entonces, el mayor valor de k es:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

2 Al resolver la inecuación:
$(x + 5)(x - 2) - 5 \geq (x + 2)(x - 2) - 3$
se obtiene como extremo finito del conjunto solución a:

A) 3/8 B) 1/3 C) 3 D) 8/3 E) 2

3 Indica el conjunto de valores de m de modo tal que la inecuación: $(m + 3)x^2 - 2mx + 4 < 0$
se cumpla para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

A) $\langle -\infty; 0\rangle$ B) $\varnothing$ C) $\langle 2; 4\rangle$
D) $\mathbb{R}$ E) $\langle 0; +\infty\rangle$

4 Resuelve:
$x^2 - 7x + 12 < 2x^2 - 4x + 3$

A) $x \in \left\langle -\infty; \frac{-3 - 3\sqrt{5}}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{-3 + 3\sqrt{5}}{2}; +\infty\right\rangle$

B) $x \in \left\langle -\infty; \frac{-3 - 3\sqrt{5}}{2}\right\rangle \cup \left[\frac{-3 + 3\sqrt{5}}{2}; +\infty\right\rangle$

C) $x \in \left\langle \frac{-3 - 3\sqrt{5}}{2}; \frac{-3 + 3\sqrt{5}}{2}\right\rangle$

D) $x \in \varnothing$ E) $x \in \mathbb{R}$

5 Calcula el mínimo valor de la expresión:
$\frac{(a + 2b + 3c)^6}{216ab^2c^3}$, donde a; b; $c \in \mathbb{R}^+$

A) 27 B) 18 C) 6 D) 216 E) 36

6 Si el conjunto solución de:
$x^4 - 2x^2 - 8 < 0$; es $x \in \langle a; b\rangle$; halla a + b.

A) –2 B) 2 C) –4 D) 4 E) 0

7 Resuelve: $(x^2 + 9)(x^2 - 1) \leq 0$

A) $x \in \mathbb{R}$
B) $x \in [-1; 1]$
C) $x \in \mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle$
D) $x \in [-3; 1]$
E) $x \in [1; 3]$

8 Resuelve:
$3(2 - x) + \sqrt{3 - x} \leq 2(3 - x) - 5 + \sqrt{3 - x}$

A) $x \in \langle -\infty; 3]$
B) $x \in [3; 5]$
C) $x \in [3; +\infty\rangle$
D) $x \in \varnothing$
E) $x \in \langle -3; 5\rangle$

9 Resuelve: $\dfrac{x}{x+1} < \dfrac{12}{19}$

A) $\langle -1; 12/7\rangle$
B) $\langle 1; 3/7\rangle$
C) $\langle -3/7; 2]$
D) $[-2; 7/2]$
E) $[-3; 3/7\rangle$

10 Resuelve: $\dfrac{x+2}{x-3} \geq 2$

A) $\langle 3; 8]$
B) $[-3; 8\rangle$
C) $\langle -\infty; 8]$
D) $\langle 3; +\infty\rangle$
E) $\langle -3; -8\rangle$

11 Resuelve:
$2x - \dfrac{9}{x-3} > x - \dfrac{5}{x-3}$

A) $\langle -1; 3\rangle$
B) $\mathbb{R}$
C) $\langle 3; 4\rangle$
D) $\langle 5; 9\rangle$
E) $\langle -1; 3\rangle \cup \langle 4; +\infty\rangle$

12 Resuelve:
$x^2 + 3x + 11 < 0$

A) $\mathbb{R}$
B) $\varnothing$
C) $[3; 11\rangle$
D) $\langle 3: 11\rangle$
E) $\langle -3; -11]$

13 Halla el conjunto de números negativos en que debe estar contenido x, según la inecuación: $\dfrac{(x-4)(x+2)(x-5)}{(x+6)(3-x)} \leq 0$

A) $\langle -\infty; -2\rangle$
B) $\langle -\infty; -6]$
C) $\langle -6; -0]$
D) $\langle -1; -3\rangle$
E) $\langle -6; -2]$

14 Halla el conjunto de números positivos en que debe estar contenido x según la inecuación:
$$\frac{(x+4)^2(x-1)^3(x+7)^4(2x+1)^5}{(x+1)^6(x+9)^7(x-6)^{99}(3x-7)^{100}} \leq 0$$

A) $[1; 6\rangle - \left\{\dfrac{7}{3}\right\}$
B) $\langle 1; +\infty\rangle$
C) $[2; +\infty\rangle$
D) $\langle 1; -7\rangle$
E) $[2; -7]$



Claves

1. C	3. B	5. D	7. B	9. A	11. E	13.
2. D	4. A	6. E	8. D	10. A	12. B	14.

Practiquemos





NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Indica el valor de verdad de:

( ) $\forall$ a; b $\in \mathbb{R}^+$: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

( ) $\forall$ a; b $\in \mathbb{R}^+$; $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

( ) $\forall$ a; b $\in \mathbb{R}^+ \wedge n \in \mathbb{N}$: $\frac{a+nb}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{ab^n}$

A) VVF B) VVV C) FVV
D) VFF E) FFF

2. Es una propiedad particular de las inecuaciones.
Reemplaza cada letra por la que la precede en el abecedario y descubrirás de qué propiedad se trata. Considera que la letra que precede a la A es la Z.

FM DPÑKVÑUP EF WBMPSFT BENJTJCMFT HBSBÑUJAB MB FYJTUFÑDJB EFM WBMPS EF MBT WBSJBCMFT QBSB RVF VÑB FYQSFTJPÑ NBUFNBUJDB FTUF CJFÑ EFGJÑJEB.

Razonamiento y demostración

3. Indica el mayor número entero M que satisface la desigualdad:
$2x^2 - 4x + 1 > 2M$; $\forall$ x $\in \mathbb{R}$
(a tal desigualdad la llamaremos absoluta)

A) 3 B) – 2 C) 0 D) 1 E) – 1

4. Halla el menor número racional m tal que $\forall$ x $\in$ [2; 4] se satisface la desigualdad:

$\frac{x+3}{x-5} \leq m$

A) $-\frac{2}{3}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) $-\frac{5}{3}$ D) – 7 E) – 6

5. Encuentra el mínimo valor de:

$E = x^4 + \frac{4z^2}{x^2} + \frac{9}{xz}$

sabiendo que: $x > 0 \wedge xz > 0$

A) 5 B) 14 C) 16 D) 18 E) 12

6. Halla el menor número M con la propiedad de que para todo x $\in \mathbb{R}$ se cumpla:
$1 + 6x - x^2 \leq M$

A) 11 B) 9 C) 12 D) 10 E) 0

7. Resuelve:
$(x + 7)(8 + 2x - x^2) + (x^2 + 3x - 28) > 0$

A) $\langle -7; 3\rangle \cup \langle 4; +\infty\rangle$
B) $\langle -\infty; -7\rangle \cup \langle -3; 4\rangle$
C) $\langle -\infty; -3\rangle \cup \langle 4; +\infty\rangle$
D) $\langle -7; -3\rangle \cup \langle -3; 4\rangle$
E) $\langle -\infty; -7\rangle \cup \langle -1; 4\rangle$

8. Si la inecuación:
$(x - 1)(x - 3) \geq k$
se verifica $\forall$ x $\in \mathbb{R}$,
encuentra el máximo valor de k.

A) –1 B) 1 C) 0
D) 3 E) 2

9. Resuelve la inecuación:
$abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab < 0$,
si se sabe que: $0 < a < b$. Indica el conjunto solución.

A) $\left\langle \frac{b}{a}; \frac{a}{b} \right\rangle$ B) $\left\langle \frac{a}{b}; \frac{b}{a} \right\rangle$ C) $\left\langle \frac{a}{b}; a \right\rangle$

D) $\langle a; b\rangle$ E) $\left\langle \frac{1}{a}; \frac{1}{b} \right\rangle$

10. Resuelve:
$\frac{x-2}{x^2+x-2} \geq 0$

A) $\langle -2; 1\rangle \cup [2; +\infty\rangle$ B) $\langle -\infty; 2\rangle \cup [3; +\infty\rangle$
C) $\langle -2; 1] \cup \langle 2; +\infty\rangle$ D) $\mathbb{R} - \{0\}$
E) $\langle -3; 4] \cup \langle -2; 3\rangle$

11. Resuelve:
$\frac{(x-3)(x+4)}{(x-1)(x+5)} \leq 0$

A) $\langle -\infty; -4\rangle$ B) $\langle -5; -4] \cup \langle 1; 3]$
C) $\langle -1; 3] \cup \langle 4; +\infty\rangle$ D) $\langle -8; -4\rangle \cup \langle -1; 3]$
E) $\langle -\infty; 2\rangle \cup \langle 3; +\infty\rangle$

12. Determina el intervalo al cual pertenece k para que la inecuación:
$\frac{x^2+kx+1}{x^2+1} < 2$, se cumpla $\forall$ x $\in \mathbb{R}$.

A) $\mathbb{R}$ B) $\langle -1; 2\rangle$ C) $\langle 1; 2\rangle$
D) $\langle -2; 2\rangle$ E) $[-2; 2]$

Resolución de problemas

13. Determina cuántos valores enteros de k satisfacen la siguiente inecuación, para que se verifique para todo x real:
$x^2 - \sqrt{k-3}\,x + 5 > 0$

A) 10 B) 20 C) 22
D) 19 E) 2

14. Dos hermanos mellizos al discutir sus edades el primero dice:
"Si a la edad que tengo le resto la quinta parte de mi edad disminuido en 3, a lo más se obtiene 19", y el segundo mellizo respondió:
"Pero si a mi edad que tengo le resto la sexta parte de mi edad disminuida en 5 se obtiene cuanto menos 20".
Determina la edad de los mellizos.

A) 19 años B) 20 años C) 21 años
D) 22 años E) 23 años

NIVEL 2

Comunicación matemática

15. Indica el valor de verdad de:

I. $m + \frac{1}{m} < 2; \forall m \in \mathbb{R}^+$

II. $a^2 + b^2 + c^2 \leq ab + ac + bc; \forall a; b; c \in \mathbb{R}$

III. $9a + \frac{1}{b^2} \geq \frac{6\sqrt{a}}{b}; \forall a \in \mathbb{R}^+ \wedge b \in \mathbb{R} - \{0\}$

A) VVV B) FVV C) FFV
D) FFF E) FVF

16. Si $a < 0 \wedge b < 0$, halla el valor de verdad de las siguientes afirmaciones $(a > b)$.

( ) $\frac{b-1}{a} < a^{-1}$

( ) $a(a - b) > b(a - b)$

( ) $\frac{b}{a-b} > \frac{b}{a}$

( ) $\frac{b^2}{a} < b$

A) FFFV B) VFVF C) VVFF
D) FVFV E) VVVV

Razonamiento y demostración

17. Si $x > -1$, calcula el mínimo valor de la siguiente expresión:

$x + \frac{1}{x+1}$

A) –2 B) 2 C) 3 D) –1 E) 1

18. ¿A qué intervalo pertenece m para que la ecuación:
$x^2 - 2x + m = 0$, tenga raíces positivas?

A) $[-1; 0\rangle$ B) $\langle 0; 1]$ C) $[-1; 0]$
D) $[0; 1]$ E) $\langle 0; 2]$

19. Si la ecuación en x:

$x^2 - (m-1)x + 3 - m = 0$

posee raíces positivas, halla el valor de m $(m \in \mathbb{N})$.

A) 1 B) $\nexists$ C) 3 D) 4 E) 2

20. Señala un intervalo que pertenece al conjunto solución de:

$$\frac{(x-5)^5(x+2)^2(x-1)^3}{x(x+3)^4} > 0$$

A) $\langle -\infty; 3\rangle$ B) $\langle -3; -2\rangle$ C) $\langle 1; 5\rangle$
D) $\langle -2; 0\rangle$ E) $\langle 0; 1\rangle$

21. Al resolver:

$[(3x + 2m)^2 + (2x - 3m)^2](-4 + 4x - x^2)(x-2)^6 > 0$

donde $m \in \mathbb{Z}$, indica su conjunto solución.

A) $\mathbb{R} - \{2\}$ B) $\langle 2; +\infty\rangle$ C) $\langle -3; 2\rangle$
D) $\{2\}$ E) $\varnothing$

22. Resuelve:

$\frac{x+3}{x-5} > \frac{x+1}{x-2}$

A) $\left\langle \frac{1}{5}; 2\right\rangle$ B) $\left\langle \frac{1}{5}; 5\right\rangle$ C) $\langle 2; 5\rangle$

D) $\left\langle \frac{1}{5}; 2\right\rangle \cup \langle 5; +\infty\rangle$ E) $\left\langle -\infty; \frac{1}{5}\right\rangle \cup \langle 2; 5\rangle$

23. Si $[a; b\rangle \cup \langle c; d\rangle$ es el conjunto solución de la inecuación:

$\frac{x-1}{x^2 - 5x + 6} \geq \frac{x-2}{x^2 - 7x + 12}$

entonces el valor de $T = a + b + c + d$, es:

A) 2 B) 5 C) 10 D) 6 E) 9

24. Al resolver:

$\sqrt{x+6} + \sqrt{4x+24} < 3x$,

obtenemos por conjunto solución:

A) $\varnothing$ B) $\mathbb{R}$ C) $\mathbb{R}^-$
D) $\mathbb{Z}^-$ E) $\langle 3; +\infty\rangle$

Resolución de problemas

25. Una empresa contrató a un estudiante como promotor de ventas de un producto y le dieron a elegir dos modalidades de sueldo.
Modalidad A: una comisión de \$3,20 por cada artículo vendido.
Modalidad B: un sueldo fijo de \$860 más comisión de \$1,80 por cada artículo vendido que exceda las 50 unidades.
La suma de las cifras de la cantidad mínima de artículos que debe vender para que la primera opción sea más conveniente es:

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

26. Un libro de química tiene el cuádruple de páginas que uno de física y entre los dos tienen menos de 130 páginas. Si el libro de química tiene más de 96 páginas, determina el número de páginas del libro de física.

A) 25 págs. B) 50 págs. C) 80 págs.
D) 35 págs. E) 115 págs.

NIVEL 3

Comunicación matemática

27. Determina el valor de verdad de las afirmaciones:

I. Si $x \in \langle -1; 5\rangle \Rightarrow \frac{3}{2x+5} \in \langle 0; 1\rangle$

II. Si $x \in [0; 4\rangle \Rightarrow \sqrt{\frac{16-x}{x+2}} - \sqrt{x} + 1 > 0$

III. Si $\frac{x-1}{x+3} > x \Rightarrow x < -3$

A) FVV B) FVF C) FFV
D) FFF E) VVV

28. Lenguaje

Ubica solo los grupos de letras tanto en los casilleros de la derecha y el de la izquierda, así como las letras solas en el espacio central, de esta manera formarás diez palabras. Con las letras ubicadas en el centro en forma adecuada se podrá formar la décimoprimera palabra.

A ISIBLES O DES T DO PR AD EMA C IN IONES VAL RES FRACCI I ERVALO M I INECUA T GUALDAD R GR O CONJUN O TEO MER NARIAS

Razonamiento y demostración

29. Si $[m; n]$ es el conjunto solución de $x^2 \leq 2x + 1$, halla: $m^{-1} + n^{-1}$

A) 1 B) –1 C) 2 D) –2 E) 1/2

30. Resuelve en $\mathbb{Z}$:

$(x - 3)(4 - x) > -x$

e indica la suma de las soluciones.

A) 2 B) 14 C) 10 D) 8 E) 12

31. Dada la ecuación de raíces imaginarias:

$2x^2 - (m + 1)x + m + 1 = 0 \,/\, m \in \mathbb{Z}$

halla el mínimo valor de m.

A) 1 B) –1 C) 0 D) –2 E) 2

32. Resuelve:

$$\frac{(x+2)(x-1)(x-4)}{x+5} \geq \frac{(x+2)(x-1)(x-4)}{x+6}$$

Indica un intervalo solución.

A) $\langle -2; 1\rangle$ B) $[-6; -5]$ C) $[4; +\infty\rangle$
D) $\langle 4; +\infty\rangle$ E) $\langle -5; -2]$

33. Sabiendo que $x + y = 1$, siendo $x > 0 \wedge y > 0$, entonces qué podemos afirmar de λ, si $\frac{\lambda}{16} \leq x^4 + y^4$.

A) $\lambda = 2$ B) $\lambda \geq 1/2$ C) $\lambda \leq 2$
D) $\lambda = 1/2$ E) $\lambda \geq 2$

34. Determina la suma de los valores enteros positivos que satisfacen:

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} < x^2 - x + 9$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

35. Sabiendo que:

$k \leq \frac{x^2 + 17}{\sqrt{x^2 + 1}}; \forall\, x \in \mathbb{R}$, calcula el mayor valor de k.

A) 6 B) 4 C) 8 D) 10 E) 5

36. Resuelve:

$\frac{x - 2}{x + 3} < \frac{x + 1}{x}$, indica un intervalo solución.

A) $-3 < x < -\frac{1}{2}$ B) $-2 < x < 1$
C) $-5 < x < 0$ D) $-3 < x < -1$
E) $-5 < x < 2$

37. El conjunto solución de la inecuación:

$(x - 1)^3(x^2 + 3x + 4)(x^3 - 1) > 0$

es: $\langle -\infty; a\rangle \cup \langle b; +\infty\rangle$

Calcula: $a^2 + b^2$

A) –3 B) –2 C) 2 D) 3 E) 4

Resolución de problemas

38. Cierta dama se conformaba de su suerte diciendo:

"Me alegré y me reí menos de 8 veces, me reí más veces de lo que susurraba, me alegré más de unas tres veces de lo que susurré".

Determina cuántas veces se ríe, susurra y alegra en ese orden, la contenta mujer.

A) 1; 2; 3 B) 2; 1; 5 C) 2; 5; 1
D) 1; 5; 7 E) 2; 2; 5

39. Entre los 3 jugadores de fútbol: Mario, Néstor y Pablo pueden hacer más de 5 goles, Néstor piensa hacer 3 goles más con lo cual tendrá más goles entre Mario y Pablo. Néstor tiene menos goles que Pablo y los goles que hace Néstor no llegan a 3. Determina los goles que hizo Mario.

A) 1 gol B) 2 goles C) 3 goles
D) 4 goles E) 5 goles

Claves

NIVEL 1		NIVEL 2		NIVEL 3	
1. B	7. E	15. C	21. E	27. E	33. C
2.	8. A	16. D	22. D	28.	34. D
3. E	9. B	17. E	23. E	29. D	35. C
4. C	10. A	18. B	24. E	30. E	36. A
5. E	11. B	19. B	25. C	31. C	37. C
6. D	12. D	20. E	26. A	32. C	38. B
	13. B				39. A
	14. E				

Aplicamos lo aprendido





TEMA 2: FUNCIONES

1 Calcula el valor de $a + b^2$, si el conjunto:
$A = \{(8; 2), (2; a), (a^2 - 1; b), (2; 2a - 3), (3; 5)\}$,
es una función.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 4

2 Calcula el rango de la función:
$f(x) = x^2 - 4x + 1;\ x \in \langle -2; 5]$

A) $\mathbb{R} - \{-3\}$ B) $\varnothing$ C) $\mathbb{R} - \{13\}$
D) $\langle -3; 13]$ E) $[-3; 13\rangle$

3 Indica el rango de:
$F(x) = x^2 + 10x + 30$

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{R}^+$ C) $[-5; +\infty\rangle$
D) $[5; +\infty\rangle$ E) $[30; +\infty\rangle$

4 Dada la función:
$F(x) = \dfrac{5x - 1}{x + 3}$
Calcula: $Dom(F) \cap Ran(F)$

A) $\mathbb{R} - \{-3\}$ B) $\mathbb{R} - \{5\}$ C) $\mathbb{R} - \{-5\}$
D) $\mathbb{R} - \{-3; 5\}$ E) $\mathbb{R} - \{5; 1\}$

5 Si $y = F(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 3}$,
encuentra el rango de F.

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{R} - \{2\}$ C) $\varnothing$
D) $[-2; 2]$ E) $\langle -2; 2]$

6 Halla el dominio de:
$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

A) $[-2; 2]$ B) $[-2; 3]$ C) $\langle -2; 3\rangle$
D) $\langle -2; 2]$ E) $[-2; 3\rangle$

7 Calcula: $M = [\![\sqrt{3}]\!] + \dfrac{|x|}{x};\ \forall\, x > 0$

A) 2 B) 1 C) 4 D) 5 E) 0

8 Determina el dominio de $(f \circ g)(x)$.

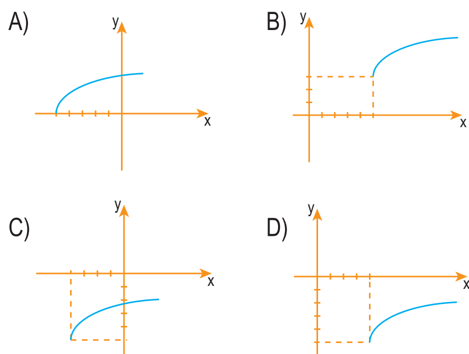
Siendo: $f(x) = \sqrt{x - 2}$

$g(x) = \sqrt{|x| - 3}$

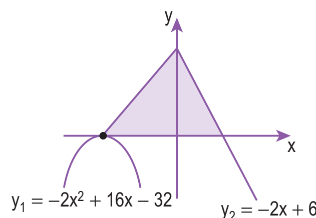
A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{R} - \{2; 3\}$ C) $\mathbb{R} - \langle -7; 7\rangle$

D) $\mathbb{R} - [-7; 7]$ E) $\mathbb{R} - [2; 3]$

9 ¿Cuál de las gráficas representa a $y = \sqrt{x + 4} - 5$?



10 Determina el área de la región sombreada:

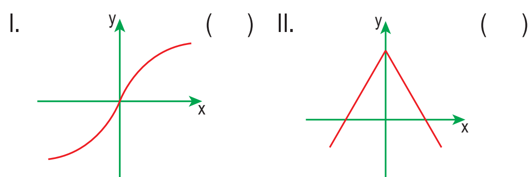


A) 20 u^2 B) 30 u^2 C) 21 u^2

D) 42 u^2 E) 50 u^2

11 Determina si cada función es par (P) o impar (I):

I. ( ) II. ( )



III. $y = x^5 + x^3 + x$ ( ) IV. $y = \sqrt{|x|}$ ( )

V. $y = x^4 - |x|$ ( )

¿Cuántas funciones son impares?

A) 1 B) 3 C) 2 D) 0 E) 4

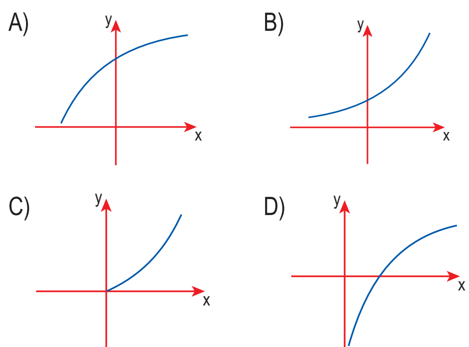
12 Determina la regla de correspondecia y dominio de $f^{-1}(x)$ si existe, siendo $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 2};\ \forall\, x \geq 3$.

A) $f^{-1} = \dfrac{2 + x}{2 - x}$; $[3; 4\rangle$ B) $f^{-1} = \dfrac{2x + 1}{2 - x}$; $[1; 2\rangle$

C) $f^{-1} = \dfrac{2x - 3}{2 - x}$; $[-7; +\infty\rangle$ D) $f^{-1} = \dfrac{x - 1}{x + 2}$; $[-7; 10]$

E) No existe

13 Esboza la gráfica de $f^{-1}(x)$, si $f(x) = 3^x$.



14 Dado: $F: [a; 5] \to [-10; b]$.

donde: $F(x) = x^2 - 4x - 32$. Determina $a + b$ para que F sea biyectiva.

A) –15 B) 10 C) –10

D) –19 E) 15



Claves

1. C	3. D	5. B	7. A	9. C	11. C	13. D
2. E	4. D	6. A	8. C	10. C	12. B	14. D

Practiquemos



NIVEL 1

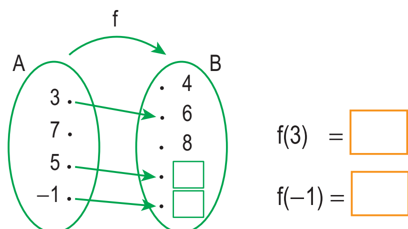
Comunicación matemática

1. Identifica la premisa incorrecta:

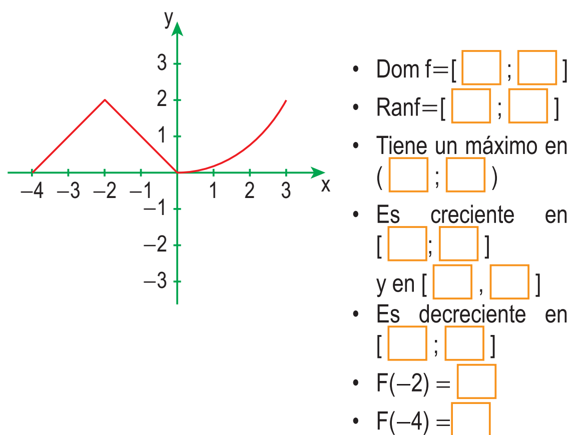
I. El volumen de una esfera y su radio es idea de función.
II. Si $(x; y) \wedge (x; z) \in$ a la función f, entonces $y = z$.
III. Sea $f(x) = 2x^2 \Rightarrow f(3) = 18$
IV. En $h = \{(x; y)\} \in A \times B / y = 3x\}$ indica que el valor del dominio es el triple que el rango.
V. Toda función es una relación.

2. Completa según corresponda:

a) Sea la función $f: A \longrightarrow B / y = 2x$.



b) Sea la función f:



- Dom f=[;]
- Ranf=[;]
- Tiene un máximo en (;)
- Es creciente en [;] y en [,]
- Es decreciente en [;]
- F(–2) =
- F(–4) =

c) $y = x^2 + 3$

x	–4	–2		1	2	5
y	19		4			

3. Sin hacer operaciones completa o responde:

a) Dominio y rango de $f(x) = \sqrt{x}$ ...

b) ¿La gráfica de |x| es simétrica? ¿A qué eje?

c) Si $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a < 0$, ¿a qué figura corresponde? La figura es cóncava hacia...

d) Si $f(x) = \sqrt{x - 3} + [\![\sqrt{x}]\!]$, ¿existe f(2) en $\mathbb{R}$?

e) $[\![-4,2]\!] = ...$

f) G — G no es una función porque ...

Razonamiento y demostración

4. Determina a + b de modo que el conjunto sea una función. $(a > 0)$

$F = \{(2; 5), (-1; 4), (2; 2a^2 - b), (-1; b - a^2)\}$

A) 13 B) 17 C) 18
D) 16 E) 12

5. Calcula 5a – b para que el conjunto M nos represente una función:

$M = \{(10; 5), (-7; -3), (10; 2a - b), (-7; b - a), (3a + b; b)\}$

A) 8 B) 6 C) 17
D) 13 E) 11

6. Calcula el rango de:

$f(x) = 3x + 4;\ x \in \langle -3; 2]$

A) $\varnothing$ B) $\mathbb{R} - \{5\}$ C) $\langle -5; 10]$
D) $\mathbb{R} - \{10\}$ E) $\langle -10; 5]$

7. Halla el dominio de la función:

$F(x) = \sqrt{x - 6} - 3$

A) $[-3; +\infty\rangle$ B) $[6; +\infty\rangle$ C) $\langle 3; +\infty\rangle$
D) $\langle -\infty; 6]$ E) $[-6; +\infty\rangle$

8. Si:

$$F(x) = \begin{cases} 4x + 5; & x < 0 \\ 3x - 4; & x \geq 0 \end{cases}$$

Calcula: $F[F(1)] - F[F(0)]$

A) 5 B) –5 C) –4
D) 4 E) 12

9. Determina: F(–3)

Si $F(x) = [\![x]\!] + \sqrt{-x + 1} + |x|$

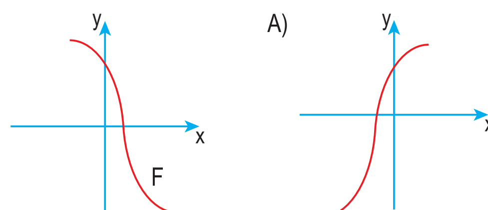
A) 0 B) 1 C) 3
D) 4 E) 2

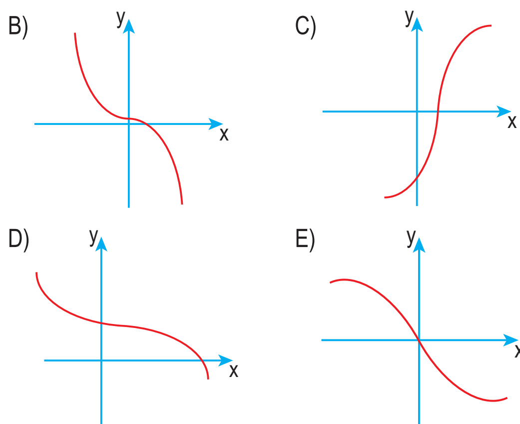
10. Sean: $f(x) = x - 1$; $g(x) = x^2 - 2$

Halla: $f \circ g\,(3) + f \circ g\,(5)$

A) 18 B) 28 C) 15
D) 8 E) 23

11. En la figura se muestra la gráfica de la función F. Entonces, la gráfica de F* será.





Resolución de problemas

12. Realiza los gráficos de:

I. $y = 3$ II. $f(x) = |x - 5|$

III. $f(x) = -\sqrt{x+2}$ IV. $f(x) = [\![x - 3]\!]\ ;\ x \in [0, 2\rangle$

13. Halla el dominio, rango y traza la grafica de la función:

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^2 + 2x - 3}$$

14. Si f es una función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1;\ \ \text{si} |x| \leq x,\ \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x};\text{si } x < 0 \end{cases}$$

determina el rango de f.

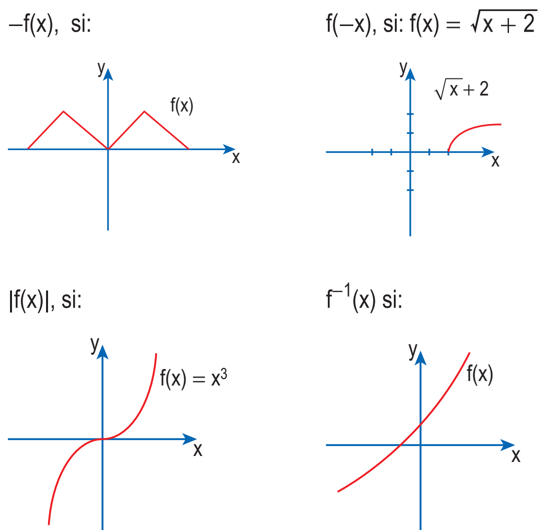
A) $[1; +\infty\rangle$ B) $\langle -\infty; 0\rangle$ C) $\mathbb{R}$

D) $\langle -\infty; 1]$ E) $\mathbb{R} - [0; 1\rangle$

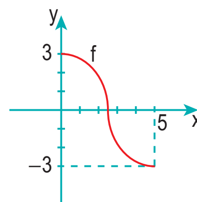
NIVEL 2

Comunicación matemática

15. Determina la gráfica de cada función indicada:



16. La gráfica de la función $f: [0;5] \rightarrow [-3; 3]$, es:



No son correctas:

I. f es inyectiva

II. f es biyectiva

III. |f| no es biyectiva

IV. Existe f^{-1}

V. Si $h(x) = f(x) + 3$; $\forall\ x \in [0; 5]$, entonces Ran (h) = Ran (f)

A) I y II B) III y V C) III y IV

D) Solo IV E) V

17. Dada la siguiente tabla con valores de las funciones f y g.

x	5	6	7	8
f(x)	8	7	6	5
g(x)	7	8	6	5

Determina:

$$\frac{[(g + f) \text{ o } f](6) - f(5) - f(8)}{(g \text{ o } g)(6)}$$

A) –5 B) 1/5 C) –1/5 D) 2/5 E) 5/3

Razonamiento y demostración

18. Sean las funciones:

$G = \{(3; 5), (8; -3), (4; 12), (3; a + 4), (4; n - 5)\}$

$F = \{(1; 9), (5; 13), (-2; 5), (17; 7)\}$

Calcula: $\sqrt{F(a) + F(n)}$

A) 4 B) 3 C) 5

D) 7 E) 8

19. Si F y G son funciones de variable real, definidas por:

$F(x) = 3x + 5a$

$G(x) = (b + 2)x + 7$

$F(G(x)) = 9x - 4$

calcula: F(b)

A) 10 B) 13 C) –17

D) 19 E) –22

20. Halla el rango de la función:

$G(x) = |2x - 1| - x$

A) $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right\rangle$ B) $\left\langle -\infty; -\frac{1}{2}\right]$ C) $\langle -\infty;1]$

D) $\left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\rangle$ E) $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right\rangle$

21. Halla el rango de:

$T = \left\{(x;\ y)/\ y = \sqrt{25 - x^2}\right\}$

A) $\{y / y \geq 0\}$
B) $\{y / \sqrt{5} \leq y \leq 5\}$
C) $\{y / 1 \leq y \leq 5\}$
D) $\{y / y \geq 5\}$
E) $\{y / 0 \leq y \leq 5\}$

22. Dada la función:

$$F(x) = \begin{cases} 3x^2 - 16; & -4 \leq x \leq 2 \\ 2x + 7; & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

Indica el rango.

A) [–4; 16]
B)]–4; 32]
C) [–16; 32]
D) [11; 32]
E) [–16; 4]

23. Determina el dominio de la función real:

$$F(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x - 6}}{\sqrt{[\![x - 1]\!] + 3}}$$

A) $\langle -\infty; 2]$
B) $[2; +\infty\rangle$
C) [2, 6]
D) [3, 6]
E) $[6; +\infty\rangle$

24. Sea: $f(x) = 3x + 4$; $x \in \langle 2; 6]$
$g(x) = 6x - 3$; $x \in \langle 1, 3\rangle$

Determina: Dom ($f \circ g$).

A) [1; 3/2]
B) $\langle 1; 3\rangle$
C) $\langle 1; \frac{3}{2}]$
D) $\mathbb{R}$
E) $\langle 2; 3/2\rangle$

25. Sean las funciones:

F= {(–3;1), (–2;4), (–1;5), (2;3), (3;7), (0;1)}

$G(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Indica el elemento que no pertenece a $(f + g)(x)$

A) (–2; 4)
B) $(-1;5 + \sqrt{3})$
C) (2; 3)
D) $(-3; \sqrt{5})$
E) (0; 3)

Resolución de problemas

26. Si: $f(2 + x) + f(x - 2) = x + 8$,
determina f(4), si f es una función lineal.

A) 3
B) 7
C) 8
D) 6
E) 2

27. Se desea cercar un jardín en forma de sector circular. Halla una función área A(x) y determina el radio x para que dicho sector sea de área máxima, si se posee 400 m de cerco.

A) $100x - x^2$; 50m
B) $200x - x^2$; 100 m
C) $50x - x^2$; 60 m
D) $\frac{x^2}{2}$; 30 m
E) $(x - 100)^2$; 50 m

NIVEL 3

Comunicación matemática

28. Determina el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si $f(x) = \sqrt{\text{sen } x} \Rightarrow \text{DomF} \in [0; \frac{\pi}{2}]$ ( )

II. $f(x) = \sqrt{x - 1}\,.\sqrt{x - 2}$ y $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ son funciones iguales. ( )

III. $f(x) = \frac{|x| + \cos x}{2}$ es función par. ( )

IV. La función F: $\langle -\infty; 0] \longrightarrow [0; +\infty\rangle$ / $F(x) = x^2$ es sobreyectiva. ( )

V. F: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ / $f(x) = x - 20$, es biyectiva. ( )

VI. $F(x) = x^2 + x - 10$, no tiene inversa. ( )

VII. Si F es creciente, entonces F* es creciente. ( )

29. Relaciona correctamente:

$F(x) = x - [\![x]\!]$	Función par
$F(x) = \left(x^2 - \frac{6}{\lvert x \rvert}\right) \text{sen}3x + \sqrt[3]{x}$	Función periódica
$F(x) = x\left(x - \sqrt[3]{x}\right)$	Función impar

Razonamiento y demostración

30. Dada la función F tal que: $F(4) = 1$; $2F(2) = 3F(3)$, además $F(x) = ax + b$. Luego podemos afirmar:

A) $F(1) = 6$
B) $F(3) = -2$
C) $F(-4) = F(14)$
D) $F(10) = 5$
E) $F(2) + F(8) = 0$

31. Determina el rango de la función F definida por:

$$F(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 9} + 2; & -4 \leq x \leq 2 \\ -6; & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

A) $[2; 9] \cup \{-6\}$
B) $[-2; 9] \cup \{6\}$
C) $[5; 7] \cup \{-6\}$
D) $[5; 7] \cup \{6\}$
E) $[2; 9] \cup \{-6\}$

32. Identifica las premisas correctas.
Sean las funciones f y g:

$F(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - 1}$ y $g(x) = x$

I. $f(x) = g(x)$
II. $\text{Domf} \cap \text{Domg} = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$
III. $\text{Rang} - \text{Ranf} = \{-1, 1\}$

A) Solo I
B) I y II
C) II y III
D) I, II y III
E) Solo III

33. Determina la suma de los elementos del rango de $F^3 + G$, donde:

$$F(x) = \begin{cases} x\,;\, x \in \mathbb{Q} \\ -x\,;\, x \in \mathbb{Q}' \end{cases}$$

$G = \{(\sqrt[3]{3}\,; 6)\,; (4; 1)\,; (1; 7)\}$

A) 77 B) 47 C) 66 D) 76 E) 25

34. Se tiene una función real periódica F de periodo 7
Si : F(3) = 8 y F (5) = 4
Determina: F (10) + F(17) + F(19)

A) 16 B) 20 C) 24
D) 12 E) 14

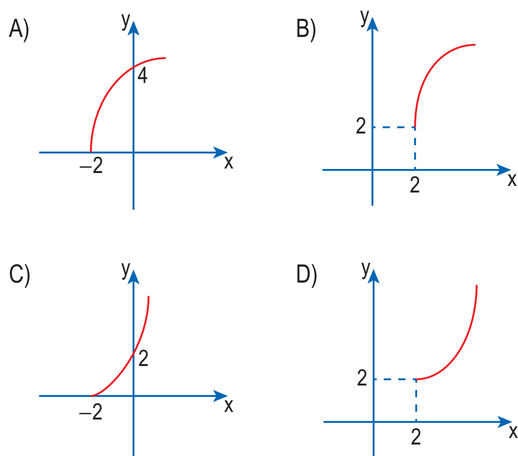
35. Si f: $\langle 3; 6\rangle \longrightarrow B$ / $f(x) = \dfrac{x+3}{x-3}$ es una función suryectiva, determina el conjunto B.

A) $[3; +\infty\rangle$ B) $\mathbb{R}$ C) $\langle 3; +\infty\rangle$
D) $\left\langle \dfrac{x+3}{x-3};\ +\infty\right\rangle$ E) $[-3; 3]$

36. Determina el menor valor que debe tomar m, de tal modo que f(x) sea inyectiva si $f(x) = x^2 - 10x + 27;\ x \in [m; +\infty\rangle$

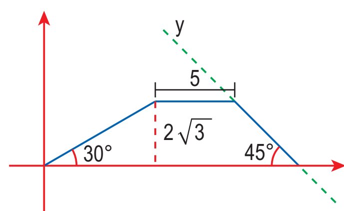
A) 10 B) 8 C) 5
D) 7 E) 4

37. Grafica la función inversa de $f(x) = x^2 - 4x + 6\,;\, x \geq 2$.



E) No existe.

38. Halla la regla de correspondencia de y.

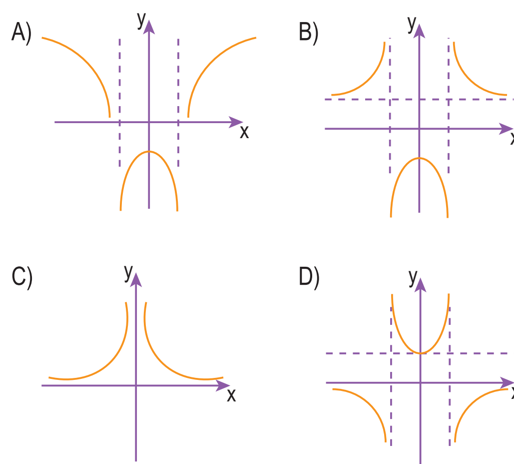


A) $y = \sqrt{3}\,x + 3$ B) $y = -x + \sqrt{3}$
C) $y = x + \sqrt{3}$ D) $y = -x + 11 + 2\sqrt{3}$
E) $y = 11 - x\sqrt{3}$

Resolución de problemas

39. Determina la gráfica de:

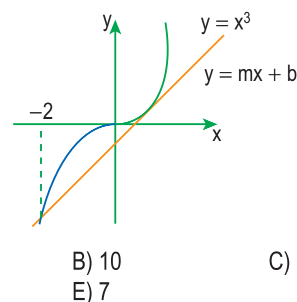
$$Y = \frac{|x| + 1}{|x| - 1}$$



40. Se lanza un proyectil hacia arriba y en determinado tiempo su alcance en metros es $h(t) = 20t - 2t^2$
Halla la altura máxima que alcanza el proyectil.

A) 25 m B) 30 m C) 40 m
D) 50 m E) 60 m

41. Determina **m − b** en la siguiente gráfica:



A) 5 B) 10 C) 8
D) 4 E) 7

Claves

NIVEL 1	**9.** E	**17.** C	**26.** D	**34.** B
1.	**10.** B	**18.** A	**27.** B	**35.** C
2.	**11.** D	**19.** E	NIVEL 3	**36.** C
3.	**12.**	**20.** A	**28.**	**37.** B
4. D	**13.**	**21.** E	**29.**	**38.** D
5. E	**14.** E	**22.** C	**30.** E	**39.** B
6. C	NIVEL 2	**23.** B	**31.** C	**40.** D
7. B	**15.**	**24.** C	**32.** C	**41.** A
8. E	**16.** E	**25.** D	**33.** D	

Aplicamos lo aprendido



TEMA 3: LÍMITES

1 Calcula:

$$\lim_{x \to 2}\left(3x^3 - 2x^2 + 5x - 7\right)$$

A) 22 B) 19 C) 21 D) 17 E) 20

2 Halla: $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 10}{x^2 + 3x + 2}$

A) -14 B) -15 C) -13 D) -12 E) 12

3 Calcula:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$$

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{9}{2}$

4 Calcula:

$$\lim_{x \to 3}\left(\frac{\sqrt{x + 6} - 3}{\sqrt{x + 1} - 2}\right)$$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{4}{6}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{9}{2}$

5 Calcula:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 4}{x - 2}$$

A) 4 B) 3 C) 7 D) 8 E) 5

6 Halla:

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x - 4} - \sqrt{3x - 14}}{x - 5}$$

A) 1 B) 0 C) -1 D) 2 E) 4

7 Halla:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 5}{x^3}$$

A) 1 B) 5 C) 0
D) 3 E) 10

8 Calcula:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{7x^2 - 2x + 1}{3x^2 + 8x + 5}$$

A) 3/7 B) 7 C) 1/4
D) 7/3 E) 9

9 Si:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2; \text{ si: } x < 4 \\ 5x + A; \text{ si: } x \geq 4 \end{cases}$$

Halla el valor de A, tal que: $\lim_{x \to 4} f(x)$ exista.

A) 3 B) 6 C) –6
D) –3 E) 0

10 Determina si existe el límite de:

$$\lim_{x \to 2} \frac{|x + 2|}{x + 2}$$

A) 0 B) 1 C) 2
D) no existe E) 3

11 Calcula:

$$\lim_{x \to b} \frac{x^3 - b^3}{\sqrt{x} - \sqrt{b}}$$

A) 0 B) –b C) $3\sqrt{b^3}$
D) $\sqrt{b}$ E) $6\sqrt{b^5}$

12 Calcula:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2x^4 + x + 1}$$

A) 1 B) 2 C) 0
D) –2 E) –1

13 Calcula:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$$

A) 1 B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{8}$

14 Determina:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x - 4}{3x + 2}\right)^{\frac{x+1}{2}}$$

A) 0 B) 1 C) e
D) e^{-1} E) e^{-2}



Claves

1. B	3. E	5. B	7. C	9. C	11. E	13. C
2. B	4. C	6. C	8. D	10. B	12. C	14. D

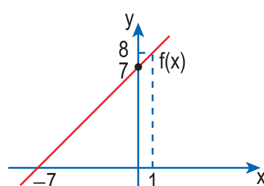


Practiquemos

NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Dado f(x), completa en el siguiente recuadro:



x_0	0,85	0,82	0,89	0,95	0,99	1
$\lim\limits_{x_0 \to 1} f(x)$	7,85					

y responde:

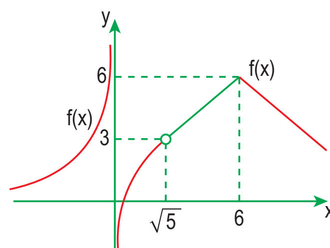
I. El valor del límite de f(x) cuando $x \longrightarrow 1$ es: ____________

II. Representa un límite lateral por la: ____________

III. Cuando f(x) se aproxima a 8 es porque x se aproxima a: ____________

2. Del siguiente gráfico completa el recuadro:

$\lim\limits_{x \to 6} f(x) =$
$\lim\limits_{x \to \sqrt{5}} f(x) =$
$\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =$
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) =$



Razonamiento y demostración

3. Calcula: $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} + 2}{x - 3}$

A) 1 B) 4 C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{8}$ E) 16

4. Determina: $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2 - 25}{x + 5}$

A) –10 B) 10 C) –21 D) –12 E) 15

5. Calcula: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x + 2)^2(2x - 8)^3}{7x^5 - 4x^3 + 2}$

A) 72/7 B) 37/8 C) 42/5 D) 21/8 E) 13/15

6. Calcula: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

7. Calcula: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + x^2 + 1}{2x^4 + x + 1}$

A) 1 B) 2 C) 0
D) –2 E) –1

8. Calcula: $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x + 5} - 2}{x + 1}$

A) 8/5 B) 3/7 C) 1/7
D) 9/11 E) 1/4

Resolución de problemas

9. Calcula: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{100} - 1}{x^{50} - 1}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 8

10. Si: $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{2x + 1} - 3}{\sqrt{x - 2} - \sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{a}}{b}$, a; b $\in \mathbb{Z}^+$

Calcula: b^a

A) 8 B) 9 C) 16
D) 15 E) 36

NIVEL 2

Comunicación matemática

11. En las siguientes proposiciones, indica verdadero (V) o falso (F), según corresponda:

( ) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{|x|}{x}$; no existe.

( ) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 + 27}{x + 3} = 27$

( ) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} = \dfrac{1}{2}$

( ) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

( ) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$; existe.

( ) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{|x|} = +\infty$

A) VFVVFV B) VFFVFF C) FVVVFV
D) VVVFVF E) VVFVVV

12. Completa los pasos para resolver el siguiente límite.

$\lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{x^3 - 1}{ax^3 + x^2 + bx + 2}\right)$ existe y es un número real.

Usamos: $a^3 - b^3 = (a - b\,(a^2 + ab + b^2)$

I. $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{(x-1)(\quad\quad)}{ax^3 + x^2 + bx + 2}$

II. Se observa que la indeterminación la genera el factor $(x - 1)$.

El cual debe aparecer en el denominador para que exista el límite.

III. Aplicamos Ruffini en el denominador:

1				a + b + 1
	a	a + 1	a + b + 1	

IV. $\Rightarrow \square + a + b + 1 = 0$

$\therefore\ a + b = \square$

Razonamiento y demostración

13. Calcula: $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} \dfrac{3x - 1}{9x^2 - 1}$

A) 1/3 B) 1/2 C) 1/4
D) 9/7 E) 3/8

14. Calcula: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 1
D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

15. Calcula: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt[5]{2 + 3x} + 3}{\sqrt[5]{x}}$

A) $\sqrt[5]{2}$ B) $5\sqrt{2}$ C) 1
D) 0 E) $\sqrt[5]{3}$

16. Determina el valor de: $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x$

A) 0 B) 1 C) $+\infty$
D) e^a E) e

17. Calcula: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 2x + 4}{7x^2 + 8x + 5}$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{5}$
D) $\frac{7}{3}$ E) $\frac{3}{7}$

Resolución de problemas

18. Si:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5; & \text{si } x < 3 \\ 3x + A; & \text{si } 3 \le x < 5 \\ x + 2B; & \text{si } 5 \le x \end{cases}$$

Halla: A + B, tal que $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$ existan.

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

19. Calcula m y n de manera que:

$\lim\limits_{x \to +\infty}\left(mx^2 + nx + \dfrac{3x^4 + 1}{x^2 + 3x - 1}\right)$, sea igual a 30.

A) $m = 2 \wedge n = -1$ B) $m = 3 \wedge n = -9$
C) $m = -2 \wedge n = 1$ D) $m = n = 2$
E) $m = -3 \wedge n = 9$

NIVEL 3

Comunicación matemática

20. Relaciona correctamente el método a usar para resolver los límites mostrados:

- $I = H(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2; & x < a \\ x + 3; & x > a \end{cases}$ ¿Existe $\lim\limits_{x \to a} H(x)$?
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{a_0x^7 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3}{b_0x^6 + b_1x^4 + b_3x + b_4}$
- Sea $F(x) \le G(x) \le H(x)$ Si $\lim\limits_{x \to a} F(x) = \lim\limits_{x \to a} H(x) = N$ $\Rightarrow$ El $\lim\limits_{x \to a} G(x)$ es:
- $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{\sqrt{x^3} - \sqrt{b}}{x - b}$

- Teoremas límites infinitos m > n
- Límites laterales
- Racionalización
- Teorema de Sandwich

21. Responde verdadero (V) o falso (F) los siguientes límites:

A) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^{\frac{x+1}{x-1}} = e^2$ ( )

B) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{|x - 2|}{x - 2} = 1$ ( )

C) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty;\ (n \in \mathbb{Z}^+)$ ( )

D) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 3}}{x + 4} = 1$ ( )

E) Si los límites laterales son diferentes, el límite en el punto de acumulación no existe. ( )

Razonamiento y demostración

22. Calcula:

$$\lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

A) $2a^2$ B) $6a^2\sqrt{a}$ C) 0
D) 3 E) $-a$

23. Halla:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[8]{x} - 1}{\sqrt[5]{x} - 1}$$

A) 1/3 B) 5/3 C) 3/5
D) 5/8 E) 8/5

24. Calcula:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x - 5}{\sqrt{x - 4} - \sqrt{3x - 14}}$$

A) -2 B) -1 C) 0
D) 1 E) 2

25. Resuelve:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x+4)^4(3x+2)^3}{x^7 - 3}$$

A) 4 B) 7 C) 17
D) 27 E) 256

26. Calcula:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{3x + \sqrt{3x + \sqrt{3x}}}}{\sqrt{3x + 1}}$$

A) 1 B) 6 C) 3
D) 12 E) 1/3

Resolución de problemas

27. Calcula: $a + b + c$

Si $\lim_{x \to +\infty} \left(ax^2 - bx + c - \frac{x^5 + 2x^4 - 5}{x^3 - 1} \right) = 0$

A) 0 B) 1 C) -1
D) 2 E) -2

28. Sea F la función definida por la regla de correspondencia:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{3x + a}{x + 3}; & \text{si: } -3 < x < -2 \\ a + b - 10; & \text{si: } x = -2 \\ \sqrt{x + 3} - 5; & \text{si: } x > -2 \end{cases}$$

Si existe el $\lim_{x \to -2} F(x)$, calcula ab.

A) 3 B) 4 C) 6
D) 8 E) 5

29. El siguiente límite $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+2}{x-2} \right)^x$; tiene la forma e^m; determina el valor de m.

A) 1 B) -1 C) 2
D) 3 E) 4

30. Halla a y b para que $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

Además $f(1) = 7$

Si $\begin{cases} f(x) = 3x^2 - a + b & \text{si } x \geq 0 \\ (x^2 - a)^2 + b & \text{si } x < 0 \end{cases}$

A) 3 y 1 B) 2 y 1 C) -1 y 2
D) -1 y 4 E) 4 y 1



Claves

NIVEL 1	7. C	13. B	NIVEL 3	26. A
1.	8. E	14. E	20.	27. A
2.	9. B	15. E	21.	28. D
3. B	10. B	16. D	22. B	29. C
4. A	NIVEL 2	17. D	23. D	30. D
5. A	11. C	18. C	24. B	
6. B	12.	19. E	25. D	





TEMA 4: DERIVADAS

1 Si $f(x) = 1 + 2x + x^2$
Halla f'(x).

A) $2x$ B) $2(1 + x)$ C) $2 + x$
D) $2 + x^2$ E) $1 + x$

2 Si $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$
Halla f'(x).

A) 1 B) $4x + 1$ C) $8x + 4$
D) $4x$ E) $8x + 1$

3 Si $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{x^3}$
Halla f'(x).

A) $x^2 + \frac{3}{x^2}$ B) $x^2 + \frac{9}{x^2}$ C) $x^2 - \frac{9}{x^4}$
D) $3x^2 - 3$ E) $x^2 - 9x^4$

4 Si $f(x) = x \cdot \sqrt{81 + x^2}$
Calcula f'(9).

A) $\frac{27\sqrt{2}}{2}$ B) $36\sqrt{2}$ C) $\frac{37\sqrt{2}}{4}$
D) $\frac{26\sqrt{2}}{4}$ E) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$

5 Si: $f(x) = \frac{x}{x - 1}$
Halla f'(x).

A) $(x - 1)^2$ B) $\frac{1}{(x - 1)^2}$ C) $\frac{-1}{(x - 1)^2}$
D) $\frac{1}{(x - 1)^2}$ E) $\frac{-1}{x - 1}$

6 Si $f(x) = \cos(4x)$
Halla f'(x).

A) $-4\text{sen}4x$ B) $\text{sen}4x$ C) $-\text{sen}(4x)$
D) $4\cos(4x)$ E) $-4\cos x$

7 Halla la derivada de:

$f(x) = \sqrt[3]{4x^2 - 1}$

A) $\dfrac{8}{3(x^2-1)}$ B) $\dfrac{8x}{3(4x^2-1)^{1/2}}$

C) $\dfrac{8x}{3(4x^2-1)^{2/3}}$ D) $\dfrac{4x}{3(4x^2-1)^{1/2}}$

E) $(4x^2-1)^{-1/3}$

8 Halla la derivada de:

$f(x) = x\text{sen}x + \cos x$

A) xsenx B) x C) senx

D) xcosx E) cosx

9 Si $f(x) = 10\sqrt[5]{x}$

Calcula: $\dfrac{df}{dx}$

A) $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt[5]{x^4}}$ B) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}$ C) $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}$

D) $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt[5]{x^4}}$ E) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$

10 Determina $f'(x)$. Si $f(x) = \tan^2 3x$

A) $\dfrac{\text{sen}3x}{\cos^2 3x}$ B) $3\sec^2 3x$ C) $\dfrac{6\text{sen}3x}{\cos^3 3x}$

D) $\dfrac{\csc^2 3x}{3}$ E) $\dfrac{6\cos 3x}{\text{sen}^2 3x}$

11 Si $f(x) = x^3 + 5x^2$

Calcula: $f''(x) + f'''(x)$

Se sabe que:

$f''(x)$: segunda derivada de la función f(x).

$f'''(x)$: tercera derivada de la función f(x).

A) $6x + 15$ B) $2(3x + 8)$ C) $6x$

D) $3x + 8$ E) $12x + 16$

12 Si $f(x) = 8x^5 - 2x^3 - 1$

Halla el valor de $f'(1)$.

A) 21 B) 25 C) 29

D) 34 E) 42

13 Descompón m en dos factores tal que la suma de ellos sea máxima e indica uno de ellos.

A) m^2 B) $\sqrt{m}$ C) $2\sqrt{m}$

D) $\sqrt{m}/2$ E) $\sqrt{m}/3$

14 Si $f(x) = Mx^b$

Halla: $f'(1)$

A) M B) $\dfrac{M}{2}$ C) bM D) $\dfrac{M}{b}$ E) M^2



Claves

1. B	3. C	5. C	7. C	9. D	11. B	13. B
2. C	4. A	6. A	8. D	10. C	12. D	14. C

Practiquemos





NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Resuelve las siguientes derivadas.

f(x)	$\frac{df(x)}{dx}$
$\sqrt[4]{x}^{\,13}$	=
$\cos(3x + 1)$	=
2^x	=
$\log(2x + 6)$	=
$3\ln(x^2)$	=

2. Determina el valor de "n" en cada caso:

f(x)	$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	n
x^{n-5}	$n - 5$	
$3x^n$	$\overline{ab} \,.\, x^7$	
$x^3 + 1/x^3 + 3x$	$3x^2 - 3x^n + 3$	
$\text{sen}(nx)$	$n\cos\frac{7}{2}x$	
$\frac{1}{\sqrt{x+2}}$	$-\frac{1}{2}(x+2)^n$	
$\sqrt{3+x}$	$\frac{1}{2(3+x)^n}$	

Razonamiento y demostración

3. Si $f(x) = x^3 - 3x + 1000$
Halla f'(x).

A) $3x^2$ B) $3x^2 + 3$ C) $3x^2 - 3$
D) $2x^3$ E) $3x^2 + 4$

4. Determina:
f'(x), si $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x}}$

A) $\frac{1}{2x}$ B) $\frac{-1}{2x\sqrt{3x}}$ C) $\frac{1}{x\sqrt{3x}}$
D) $\frac{1}{x\sqrt{3x}}$ E) $\frac{3}{2\sqrt{3x}}$

5. Halla la derivada de:
$P(x) = 4x^2\cos x$

A) 4cosx B) 8xsenx
C) 8xcosx D) 4x(cosx – senx)
E) 4x(2cosx – xsenx)

6. Halla la derivada de:
$f(x) = 3x^2 + 6x^3 + 7x^6$

A) $6x$ B) $5x + 18x^2$
C) $6x + 18x^3 + 42x^5$ D) $3x + 18x^2$
E) $6x + 18x^2 + 42x^5$

7. Si:
$f(x) = \frac{2 - x}{x}$, halla f'(x).

A) $-2/x^2$ B) $x^2/2$ C) $2x^2$
D) $3x^2$ E) $2/x$

8. Si $f(x) = 8x^5 - 2x^3 - 1$
Halla el valor de f'(1).

A) 21 B) 25 C) 29
D) 34 E) 42

Resolución de problemas

9. Un móvil recorre una trayectoria según $x = t^2 + 3t + 4$; determina qué distancia recorrerá el móvil y qué velocidad tendrá en el instante t = 12 s.
Sabiendo que:
velocidad $= \frac{dx}{dt}$; x: metros, t: segundos

A) 144 m; 36 m/s B) 180 m; 27 m/s
C) 184 m; 36 m/s D) 360 m; 36 m/s
E) 320 m; 180 m/s

10. Una empresa de electrodomésticos determinó que sus utilidades están dadas por la siguiente función:
$U(x) = 200x - 2x^2$;
donde x son las ventas totales de electrodomésticos.
Determina la cantidad de electrodomésticos que se tiene que vender para maximizar la utilidad, y a cuánto asciende dicha utilidad en soles.

A) 100; S/5000 B) 300; S/3000
C) 50; S/5000 D) 50; S/10 000
E) 100; S/5000

NIVEL 2

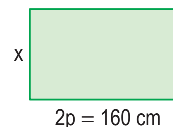
Comunicación matemática

11. Determina si la proposición es verdadera V o falsa F:

La derivada de una función H(x) representa la pendiente en x_0 de la gráfica de H(x).	◯
$y = \frac{7x^3}{6} + 4x + 3 \Rightarrow y'' = 7x$	◯
$f(x) = \frac{\text{sen}x}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x}{x}$	◯
$3x^2 - 3x + 2$; tiene un mínimo en $x = \frac{1}{2}$	◯
$f(x) = \cos x \Rightarrow \frac{d^2f(x)}{dx^2} = -\cos x$	◯

12. Determina x para que el área de las figuras sea máxima (2p = perímetro) usa derivadas.

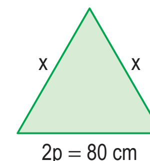
A)



2p = 160 cm

x = cm

B)



2p = 80 cm

x = cm

Razonamiento y demostración

13. Si $f(x) = \sqrt{1 + 5x}$
Halla f'(7).

A) 1/5 B) 7/12 C) 5/12
D) 13/15 E) 13/12

14. Sea: $f(x) = x\sqrt{a^2 + x^2}$; a > 0
Cacula f'(a).

A) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ C) $2a\sqrt{2}$
D) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ E) $a\sqrt{2}$

15. Si $f(x+3) = x^5$; halla $f'(x)$.

A) $5x^4$ B) $5(x-3)^4$ C) $4x^5$
D) $4(x-3)^5$ E) $\nexists$

16. Si $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$; $ad - bc \neq 0$

Halla: $f'(x) - \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

17. Dada la función:
$f(x) = \tan(2x) - \tan x$

Halla $f'(0)$.

A) 2 B) 1 C) –1
D) –2 E) 4

18. Si: $f(x) = (|x| - x)\,\sqrt[3]{9x}$
Halla $f'(-3)$.

A) 9 B) 10 C) 8
D) 3 E) 12

Resolución de problemas

19. Dado un sector circular de radio r, si el perímetro mide 100 pies, ¿qué valor del radio r producirá un área máxima?

A) 12 pies B) 15 pies
C) 20 pies D) 25 pies
E) 30 pies

20. Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba S pies del punto de partida en el instante t (segundos) según $S = 81t - 9t^2$. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada?

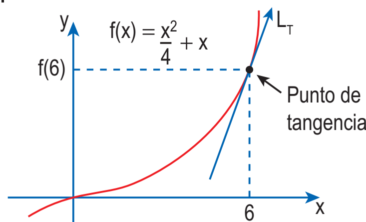
A) 182,25 pies B) 180 pies
C) 720 pies D) 170,25 pies
E) 160 pies

NIVEL 3

Comunicación matemática

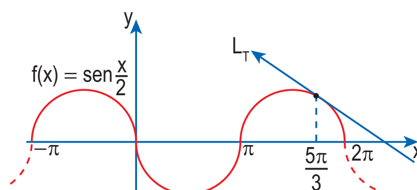
21. Halla la ecuación de la recta tangente a cada curva f(x).

I.



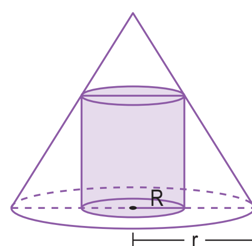
L_T:

II.



L_T:

22. Encuentra el radio R de la base del cilindro recto de volumen máximo que está inscrito en un cono, (R en función al radio r de la base del cono).



Razonamiento y demostración

23. Si $f(x) = \tan\left(e^{\ln(\arctan x^{1/3})}\right)$

Halla $f'(x)$.

A) $\dfrac{x^{-1/3}}{2}$ B) $3e^x$ C) $2x^{-3}$

D) $\dfrac{x^{-2/3}}{3}$ E) $\dfrac{1}{x^{1/3}}$

24. Dada la función: $f(x) = \ln(x+5)$

Halla $f'(x)$.

A) $1/(x+5)$ B) $1/(x-5)$ C) $5/x$
D) $5/(x-5)$ E) $5/(x+5)$

25. Dada la función:

$f(x) = \text{sen}(\cos x)$

Halla $f'(x)$.

A) senx B) cosx
C) cos(cosx) D) –cos(cosx)
E) –senx . cos(cosx)

26. Si $y = A\,\text{sen}3x + B\cos3x$, tal que

$y'' + 4y' + 3y = 10\cos3x$

Halla: A – B

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

27. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva: $x^4 - 2x^2 + x - y = 0$
en el punto (2; 10).

A) $y = 40x - 30$ B) $y = 10x + 4$
C) $y = 7x + 7$ D) $y = 30x - 10$
E) $y = 25x - 40$

Resolución de problemas

28. Encuentra el área de la mayor región que limita un triángulo isósceles que tenga un perímetro de 18 cm.

A) $9\ cm^2$ B) $9\sqrt{2}\ cm^2$
C) $9\sqrt{3}\ cm^2$ D) $2\sqrt{3}\ cm^2$
E) $12\sqrt{3}\ cm^2$

29. Halla dos números cuya suma sea n y cuyo producto sea máximo.

A) n/2 y n/2 B) n/3 y 2n/3
C) n/5 y 5n/6 D) n/4 y 3n/4
E) n y n/2

30. Un rectángulo tiene dos de sus vértices sobre el eje x los otros dos están respectivamente sobre las rectas $y = x \wedge 4x + 5y = 20$. Halla el valor de y para que el área de la región rectangular sea máxima.

A) 1 B) 10/3 C) 10/9
D) 10/7 E) 11/5



Claves

NIVEL 1
1.
2.
3. C
4. E
5. D
6. A
7. B
8. E
9. B
10. C

NIVEL 2
11.
12.
13. C
14. B
15. B
16. A
17. B
18. C
19. A
20. D

NIVEL 2
21.
22.
23. D
24. A
25. E
26. B
27. E
28. C
29. A
30. C

Aplicamos lo aprendido





TEMA 5: SUCESIONES - PROGRESIONES

1 Determina: $\frac{a_{20}}{b_{20}}$

Si: $a_n = 4; 8; 12; 16; ...$
$b_n = 2; -2; 2; -2; ...$

A) 1 B) 20 C) –40
D) 40 E) –20

2 Sea la sucesión $\{a_n\}$; $a_1 = 2$, donde:
$a_n = 2a_{n-1} + 2$
Calcula a_6.

A) 100 B) 50 C) 120
D) 126 E) 160

3 Calcula la suma de los siete primeros términos de $a_n = 2n + 4$.

A) 18 B) 24 C) 36
D) 56 E) 84

4 Calcula:

$$S = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ...\right)\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + ...\right)$$

A) 3 B) 5 C) 6
D) 1 E) 2

5 Determina el término general de la sucesión:
$\left\{2; \frac{8}{3}; \frac{18}{5}; \frac{32}{7}\right\}$

A) $\frac{n^2}{n+1}$ B) $\frac{n+3}{2n+1}$ C) $\frac{2n^2}{2n-1}$

D) $\frac{n^2}{3}$ E) $\frac{(n+1)^2}{n+2}$

6 Determina el enésimo término de la sucesión:
2; 6; 12; 20; ...

A) 2n B) $n^2 + 1$ C) 40 – 1
D) $n(n + 1)$ E) $n(n - 1)$

7 Sean las siguientes sucesiones:

$\{a_n\} : a_n = 3n^2 + 5n + 1$

$\{b_n\} = \{2; 11; 20; 29; .....\}$ ¿A qué valor converge $\left(\frac{b_n}{a_n}\right)n$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) ∞

8 ¿A qué valor converge la sucesión $\{a_n\}$: $a_n = \frac{3^{n+1}}{(n+2)!}$?

A) 1 B) 2 C) 3^{10} D) 0 E) ∞

9 En la siguiente progresión aritmética, calcula **x**:

$x - 3; 7; x + 5; ....$

A) 12 B) 6 C) 3 D) 5 E) 4

10 Calcula:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

A) 6 B) C) 0 D) 12 E) 8

11 Si el quinto y octavo término de una progresión geométrica son 5a y 8a, respectivamente; ¿cuál es la razón?

A) $(2,5)\sqrt[3]{10,4}$ B) $(0,4)\sqrt[3]{25}$ C) $(0,4)\sqrt[3]{5}$

D) $(3)\sqrt[3]{\frac{8}{5}}$ E) $(0,2)\sqrt[3]{5}$

12 Dada la PA: 5 ; ... ; 47 ; ... ; 159, donde el número de términos que hay entre 47 y 159 es el triple del número de términos que hay entre 5 y 47. El número de términos será:

A) 17 B) 20 C) 23 D) 21 E) 19

13 Interpola 6 medias aritméticas entre 64 y 15. Indica el segundo término.

A) 52 B) 53 C) 54 D) 56 E) 57

14 En la siguiente progresión: t_1; t_2 ; t_3 ;... , se conocen los términos: $t_{m+n} = a \wedge t_{m-n} = b$

Halla t_{n+1}, $n \neq 0$.

A) $t_1\sqrt{\frac{a}{b}}$ B) $t_2\sqrt{a}$ C) $\sqrt{b}$

D) $a\sqrt{b}$ E) $t_1\sqrt{\frac{b}{a}}$



Claves

1. C	3. E	5. C	7. D	9. B	11. B	13. E
2. D	4. A	6. D	8. D	10. A	12. C	14. A

Practiquemos





NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Relaciona los enésimos términos de las sucesiones:

$\frac{1}{5};\frac{4}{6};\frac{9}{7};...$	$\left(\frac{2n-1}{4-n}\right)^3$
$\left(\frac{1}{3}\right)^3;\left(\frac{3}{2}\right)^3;\left(\frac{5}{\ }\right)^3;...$	$n!$
$0;\left(\frac{1}{2}\right)^2;\left(\frac{2}{3}\right)^3;...$	$\frac{n^2}{n+4}$
1; 2; 6; 24; 120....	$\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$

2. Completa adecuadamente:

a) La función sucesión tiene su dominio en los [ ] .

b) Sea a_n el término general de una sucesión. Si $a_n > a_{n+1}$, la sucesión será [ ] .

c) En toda sucesión creciente se cumple que: [ ] .

d) Una sucesión será monótona cuando es: [ ] o [ ] .

e) Una sucesión es convergente si existe el [ ] de la sucesión a_n.

Razonamiento y demostración

3. Determina el término a_{25} de la sucesión:

$\{a_n\}: 4; \frac{3^2}{2}; \frac{4^2}{3}; \frac{5^2}{4}; ...$

A) $\frac{25^2}{24}$ B) $\frac{26^2}{25}$ C) $\frac{27^2}{26}$
D) $\left(\frac{25}{24}\right)^2$ E) $\frac{24^2}{25}$

4. Determina a qué valor converge:

$\sqrt{3}; \sqrt[3]{3}; \sqrt[4]{3}; ...$

A) $\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $\sqrt{3}^{\,3}$
D) 3 E) 1

5. Identifica si la sucesión es creciente (C), decreciente (D) o ninguna de las anteriores (N):

I. $a_n = 7(n-2)$ ( )

II. $a_n = \frac{5n}{2n+1}$ ( )

III. $a_n = \frac{(-2)^n}{n}$ ( )

IV) $a_n = \frac{3}{n^2-1}$ ( )

A) CCCD B) CNCD C) CCND
D) DDCC E) DCDN

6. Indica cuáles de las sucesiones son acotadas superiormente:

I. $\frac{n^2}{n+1}$ II. $\frac{2n}{1+2^n}$

III. $\frac{(n+1)^3}{n}$ IV. $\frac{1-2n}{1+n}$

A) Solo I B) I y II C) III
D) II y IV E) Todas

Resolución de problemas

7. Los tres números positivos en progresión aritmética que aumentado en 3; 3 y 7, respectivamente, forman una progresión geométrica de suma 28, son:

A) 3; 5 y 7 B) 2; 6 y 10 C) 3; 6 y 9
D) 1; 5 y 9 E) 3; 7 y 11

8. La suma de los dos primeros términos de la progresión aritmética es igual al valor absoluto de la suma de las raíces de la ecuación:

$1 - \frac{6}{x} - \frac{135}{x^2} = 0;$

y el sexto término es igual a 21. Halla la razón.

A) 2 B) 4 C) 2,5
D) 6 E) 3

9. Si $\{a_n\}$ es una sucesión definida por:

$a_1 = 2; a_{n-2} = 2a_{n-1} - a_n; \quad a_{23} = 156$

Halla: $a_4 + a_{35}$

A) 261 B) 156 C) 158
D) 164 E) 263

NIVEL 2

Comunicación matemática

10. Completa los pasos para determinar la convergencia de:

$a_n = a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + ... + \frac{n}{n^2}$

I. $\lim\limits_{n\to [\ ]} a_n = \lim\limits_{n\to [\ ]} \frac{1}{n^2}([\ ]+[\ ]+[\ ]+...+[\ ])$

factorizamos $\frac{1}{n^2}$

II. Utilizamos suma notables:

$$\lim_{n \to \square} \frac{1}{n^2} \frac{(\square)(\square)}{2} = \frac{\square}{\square}$$ (Teorema de límites)

III. ∴ Converge a : $\square$

11. En las siguientes sucesiones determina el término faltante.

a_n: 1; 1; 2; 3; 5; ◯

a_n: x^2; $4x^2$; $9x^2$; $16x^2$; ◯

L ; M ; Ñ ; Q ; ◯

$a_n = 3a_{n-1} + 5 : \underbrace{-2}_{a_1}; ...; \underbrace{◯}_{a_5}$

Razonamiento y demostración

12. Sea la sucesión: a_1; a_2; a_3; .... cuyos términos forman una PA. Determina $a_5 + a_6$, si $a_2 = 7$ y $a_4 = 19$.

A) 56 B) 45 C) 54
D) 11 E) 25

13. Marca la alternativa correcta.

$a_n = (-1)^{n-1} 3^n$, es :

A) Creciente B) Decreciente
C) Convergente D) Monótona
E) Oscilante

14. ¿A qué valor converge la siguiente serie?

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} ... + \frac{1}{n(n+1)}$$

A) 0 B) 1/2 C) 1
D) 2 E) –1

15. Calcula a qué valor converge a_n.

$$a_n = \frac{\sqrt{2n^2+3}}{n+7}$$

A) 1 B) 0 C)2
D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

16. Determina a qué valor converge la siguiente sucesión:

$a_n = \sqrt{n^2 - 5n + 6} - n$

A) 0 B) –5/2 C) Diverge
D) 1 E) – 1

17. Calcula el valor límite de:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{7}{32} + \frac{15}{128} + ...$$

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{5}{2}$ E) 2

Resolución de problemas

18. Se interpolan cuatro medios geométricos entre 160 y 5. Halla la suma de los dos últimos términos de la progresión geométrica formada.

A) 40 B) 60 C) 30 D) 15 E) 10

19. $S_n = \left(\frac{3}{2}\right)n(n+5)$ es la suma parcial de los n primeros términos de una progresión aritmética y $S_m = m(m+12)$ es la suma de los m primeros términos de otra progresión aritmética. Dos términos del mismo lugar son iguales, halla su valor.

A) 12 B) 15 C) 18
D) 21 E) 24

20. Se tienen los números x; y; z; w; los tres primeros están en progresión aritmética y los tres últimos en progresión geométrica, siendo la suma de los extremos 14 y la suma de los medios igual a 12. Indica un valor que adopta x.

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{3}$ C) 12 D) $\frac{1}{2}$ E) 8

21. La suma de tres números en progresión aritmética es igual a 15. Si 1; 4; 19 se suman, respectivamente a ellos, se obtendrán tres números en progresión geométrica. Halla la razón de la progresión geométrica.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

NIVEL 3

Comunicación matemática

22. Indica verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. La sucesión $a_n = \frac{n+1}{n^2-4}$ es convergente. $\square$

II. La sucesión :2; 3; 5; ... es creciente. $\square$

III. $a_n = \frac{3n^2+n+6}{2n^2-4n+2}$ converge a 3. $\square$

IV. Sea la PA a; b; c ⇒ $b = \frac{a+6}{2}$. $\square$

V. Sea la PG $\sqrt{3}^{\,x}; 3^{2x-1}; 9^{3x-2} ... \Rightarrow x = \frac{4}{5}$ $\square$

23. Encuentra el valor de **x** en los siguientes casos:

I. Sea la PA: 200_x ; 203_x; 211_x; ....

x = $\square$

II. 15 + 21 + 27 + 33+ ... + x = 576

x = $\square$

III. $x = 6 + 66 + 666 + ... + \underbrace{666 ... 66}_{20\ \text{cifras}}$

$x = \frac{\square}{\square} - \frac{\square}{\square}$

Razonamiento y demostración

24. ¿A qué valor converge $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n + \sqrt{n + \sqrt{3n}}}}$?

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) ∞ E) Diverge

25. Indica el valor de $\left(S + \frac{20}{9}\right)$:

$S = 11 + 11 + 111 + ... + \underbrace{111 ... 11}_{20\ \text{cifras}}$

A) $\frac{11^{20}(10^{20} - 1)}{9}$ B) $\frac{10^{21}(11^{20} - 1)}{8}$

C) $\frac{10^{10} - 10^{9}}{9}$ D) $\frac{10^{21} - 10}{81}$

E) $\frac{111^{10} - 10^{10}}{9}$

26. De la siguiente serie, determina el resultado:

$\sum_{k=1}^{12} (k + k^2)$

A) 700 B) 650 C) 750
D) 725 E) 728

27. La suma de los n términos de una PA es:

$n\left(\frac{7n + 1}{2}\right)$.

Calcula el término que ocupa el lugar 21.

A) 12 B) 12^2 C) 13
D) 13^2 E) 14

28. Si $a^2(b + c)$; $b^2(a + c)$; $c^2(a + b)$ están en PA, halla una solución para:

$M = \frac{a + c}{b}$

A) 1 B) 3 C) 2
D) 4 E) 5

Resolución de problemas

29. Si: $:\frac{1}{a} ; \frac{1}{b} ; \frac{1}{c}$ ... están en progresión aritmética,

: a ; (b + 1); c ... están en progresión aritmética

$::\left[a - \frac{1}{2}\right]$; b ; c ... están en progresión geométrica,

Halla: a + b + c

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 11

30. En una progresión geométrica existe un término que es igual a la razón. Halla el lugar que ocupa este término en dicha progresión, si:
$\log r = -1$ y $\log a = 7$

Siendo **r** y **a** la razón y el primer término, respectivamente.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

31. La suma de tres números en PG es 70. Si los extremos se multiplican por 4 y el intermedio por 5, los productos están en PA. El mayor de ellos es:

A) 10 B) 20 C) 30
D) 40 E) 50

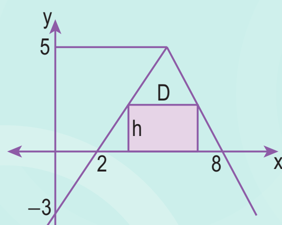


Claves

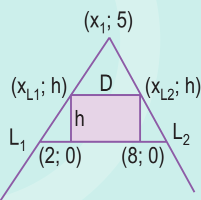
NIVEL 1	7. D	13. E	20. C	26. E
1.	8. B	14. C	21. C	27. B
2.	9. E	15. D	NIVEL 3	28. C
3. B	NIVEL 2	16. B	22.	29. E
4. E	10.	17. B	23.	30. D
5. C	11.	18. D	24. C	31. D
6. D	12. A	19. D	25. D	

MARATÓN Matemática

Determina el área máxima de la figura sombreada.



Resolución:



$\overleftrightarrow{L_1}$: $y = \tan\alpha(x-2)$ $\qquad$ $\overleftrightarrow{L_2}$: $y = \dfrac{5}{x_1 - 8}(x-8) = \dfrac{5}{\frac{16}{3} - 8}(x-8)$

$y = \dfrac{3}{2}(x-2)$ $\qquad$ $y = \dfrac{-15}{8}(x-8)$

Evaluamos $(x_1; 5)$:

$x_1 = \dfrac{16}{3}$ $\quad x_{L_1} = \dfrac{2h}{3} + 2$ $\qquad \dfrac{8y}{15} + x = 8 \Rightarrow x_{L_2} = 8 - \dfrac{8h}{15}$

Luego:

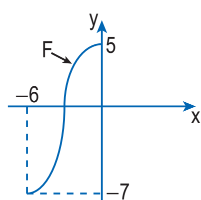
$A = hD = h(x_{L_1} - x_{L_2}) = h\left(8 - \dfrac{8h}{15} - \dfrac{2h}{3} - 2\right)$

$A(h) = h\left(6\left(1 - \dfrac{h}{5}\right)\right) = 6h - \dfrac{6h^2}{5}$

Derivamos e igualamos a cero:

$A': 6 - \dfrac{12h}{5} = 0 \Rightarrow h = 2,5 \therefore A_{máx.} = A(2,5) = 7,5$

1. Dada la siguiente gráfica de F: $[-6; 0] \Rightarrow [-7; 5]$.
Indica qué proposiciones son verdaderas.



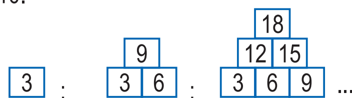
I. F es inyectiva y biyectiva.
II. |F| no es inyectiva.
III. $Ran(F+3) \in [-4; 5]$
IV. $Dom(F+1) \in [-6; 0]$

A) I; II B) I; II; IV C) II; III D) I; IV E) I; II; III

2. Determina el rango de la función:
$f(x) = -2x^2 - 12x$, si el dominio pertenece a $\mathbb{R}$.

A) $f(x) < 12$ B) $13 \leq f(x)$ C) $f(x) < 18$
D) $f(x) \leq 18$ E) $\mathbb{R}$

3. De la siguiente serie determina la suma de los números del término 10.



A) 30 B) 300 C) 4600 D) 4620 E) 5400

4. En una progresión geométrica el cuarto término es 4, el decimoprimero es 512. Determina el primer término.

A) 1 B) 2^{-1} C) 3 D) 3^{-1} E) 4

5. Determina el término general de la siguiente sucesión:
$(x)^{2x}$; $(8x)^{3x}$; $(27x)^{4x}$; ...

A) x^{2nx} B) $8nx^{nx}$ C) $(n+7)x^{nx}$
D) $(n^3x)^{(n+1)x}$ E) $(n+1)x^{nx}$

6. Si $a_1 = \sqrt[3]{B}$; $a_2 = \sqrt[3]{B\sqrt[3]{B}}$; $a_3 = \sqrt[3]{B\sqrt[3]{B\sqrt[3]{B}}}$
Determina a qué valor tiende a_n

A) B^2 B) B^0 C) B^1 D) $B^{1/2}$ E) $B^{1/4}$

7. Sea la siguiente sucesión:
a_n: 25; 36; 49; ...
Determina: $S_k = \sum_{i=1}^{10} a_n$

A) 1015 B) 1035 C) 985 D) 1045 E) 0,95

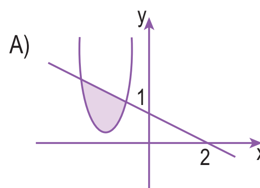
8. Sea f una función de proporcionalidad.
Si: $f(1) + f(3) = 24$, determina $f^*(6)$.

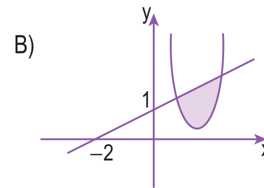
A) 4 B) 36 C) 24 D) 3 E) 1

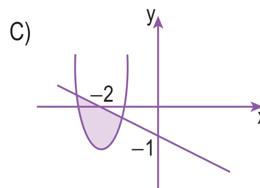
9. Determina el dominio de la siguiente función:
$f(x) = \ln\left(\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{16}} + 1\right)$

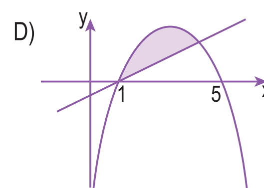
A) $\langle -2; 2\rangle$ B) $\langle -4; 4\rangle$ C) $[-4; 4]$
D) $\mathbb{R}$ E) $\mathbb{R}^+$

10. Indica cuál es el área que corresponde a la intersección de las gráficas.
$y - 6 \leq -\dfrac{3}{2}(x-3)^2 \quad \wedge \quad y \geq \dfrac{x-1}{2}$

A)


B)


C)


D)


RAZONA:

Instrucciones: completa los tableros subdivididos en 9 cuadrados llenando las celdas vacías con los números del 1 al 9, sin que se repita ninguna cifra en cada fila, ni en cada columna, ni en cada cuadrado.

1.

1			2				4	6
2	4				8	7	1	
	6	5		4		3		
	8		5		9			7
		6				9		
5			6		4		8	
		8		5		6	7	
	7	4	9				3	1
9	5				6			8

2.

	5						1	
7	9	6			1		2	3
		3		2	9	5	6	
	3	9		5				
		1	3		8	6		
				1		3	4	
	6	4	1	8		7		
9	2		4			1	3	8
	8						5	

3.

3			2	8		6	9	
2	5		4					
	8			1			2	4
	7	3			5			9
	9	2				5	6	
4			9			8	7	
9	1			4			5	
					9		3	1
	3	4		6	2			7

4.

		6	3	8	1	9		
	8	3		9		4	1	
1								8
4				3				9
	1	8				2	3	
5				6				4
3								7
	2	7		5		6	9	
		4	6	1	7	8		

5.

						7		
	4	1	3	6		2		
	7		5		2		1	8
	8	4			6		2	
			2	3	8			
	3		9			5	8	
7	1		6		3		9	
		8		7	1	6	3	
		3						

6.

		8		3		6		
	5	4			6		2	
9			5	2			3	8
	2			6		8		
8		3	2		4	5		6
		7		9			4	
1	8			4	2			3
	4		3			2	8	
		2		1		9		

7.

			7	5			1	2
6			9	3				
7	5			1	4	9		
4						1		
2	1		8	6	3		9	5
		6						8
		4	5	8			2	9
				9	7			4
8	7			2	6			

8.

4		5	3				1	6
6	3				1		7	
		2			7	3		9
	8	7		6				2
			8		4			
3				9		1	8	
5		3	4			8		
	6		9				5	3
7	2				3	9		4

Respuestas:

1.

1	3	7	2	9	5	8	4	6
2	4	9	3	6	8	7	1	5
8	6	5	1	4	7	3	9	2
4	8	3	5	1	9	2	6	7
7	1	6	8	2	3	9	5	4
5	9	2	6	7	4	1	8	3
3	2	8	4	5	1	6	7	9
6	7	4	9	8	2	5	3	1
9	5	1	7	3	6	4	2	8

2.

8	5	2	6	7	3	9	1	4
7	9	6	5	4	1	8	2	3
4	1	3	8	2	9	5	6	7
6	3	9	7	5	4	2	8	1
2	4	1	3	9	8	6	7	5
5	7	8	2	1	6	3	4	9
3	6	4	1	8	5	7	9	2
9	2	5	4	6	7	1	3	8
1	8	7	9	3	2	4	5	6

3.

3	4	1	2	8	7	6	9	5
2	5	6	4	9	3	7	1	8
7	8	9	5	1	6	3	2	4
8	7	3	6	2	5	1	4	9
1	9	2	8	7	4	5	6	3
4	6	5	9	3	1	8	7	2
9	1	7	3	4	8	2	5	6
6	2	8	7	5	9	4	3	1
5	3	4	1	6	2	9	8	7

4.

7	4	6	3	8	1	9	5	2
2	8	3	7	9	5	4	1	6
1	9	5	2	4	6	3	7	8
4	7	2	5	3	8	1	6	9
6	1	8	9	7	4	2	3	5
5	3	9	1	6	2	7	8	4
3	6	1	8	2	9	5	4	7
8	2	7	4	5	3	6	9	1
9	5	4	6	1	7	8	2	3

5.

3	5	2	1	8	9	7	4	6
8	4	1	3	6	7	2	5	9
6	7	9	5	4	2	3	1	8
1	8	4	7	5	6	9	2	3
5	9	7	2	3	8	4	6	1
2	3	6	9	1	4	5	8	7
7	1	5	6	2	3	8	9	4
9	2	8	4	7	1	6	3	5
4	6	3	8	9	5	1	7	2

6.

2	7	8	4	3	1	6	9	5
3	5	4	9	8	6	1	2	7
9	6	1	5	2	7	4	3	8
4	2	5	1	6	3	8	7	9
8	9	3	2	7	4	5	1	6
6	1	7	8	9	5	3	4	2
1	8	9	6	4	2	7	5	3
7	4	6	3	5	9	2	8	1
5	3	2	7	1	8	9	6	4

7.

9	4	3	7	5	8	6	1	2
6	8	1	9	3	2	5	4	7
7	5	2	6	1	4	9	8	3
4	9	8	2	7	5	1	3	6
2	1	7	8	6	3	4	9	5
5	3	6	1	4	9	2	7	8
3	6	4	5	8	1	7	2	9
1	2	5	3	9	7	8	6	4
8	7	9	4	2	6	3	5	1

8.

4	7	5	3	8	9	2	1	6
6	3	9	2	4	1	5	7	8
8	1	2	6	5	7	3	4	9
9	8	7	1	6	5	4	3	2
2	5	1	8	3	4	6	9	7
3	4	6	7	9	2	1	8	5
5	9	3	4	7	6	8	2	1
1	6	4	9	2	8	7	5	3
7	2	8	5	1	3	9	6	4

RAZONA:

Instrucciones: completa los tableros subdivididos en 9 cuadrados llenando las celdas vacías con los números del 1 al 9, sin que se repita ninguna cifra en cada fila, ni en cada columna, ni en cada cuadrado.

1.

9		6		4	3	5		
	7		5			9	2	4
						8		
3		7		9				2
	8		7	5	6		4	
5				2		1		7
		4						
6	1	8			7		9	
		5	4	1		2		8

2.

			2	3		9	6	
	9		4				2	
6	3		8					5
3	8				2			
4	1	9		6		5	8	2
			9				3	4
1					4		7	8
	2				3		5	
	5	8		2	1			

3.

				1	8			
	4	8				6	5	1
		6	5			2		8
	5		7				2	9
7			3	2	1			6
2	6				5		7	
9		7			6	3		
6	1	2				9	4	
			1	9				

4.

3				2		9		1
	1				8		3	
6			3	1				
	3		9		1	2		
9		2		8		7		4
		4	2		7		9	
				9	2			6
	6		8				5	
5		3		7				8

5.

		6	7					5
	5						4	
9					5	7	3	6
4		8			1	9		
1		5	4	6	9	2		7
		9	8					4
2	7	3	9					1
	9						2	
6					2	4		

6.

7								6
		9	2				7	3
8	6		1	3			9	4
		4	6		2			
		8	3	4	1	9		
			9		8	5		
3	8			1	9		2	5
5	1				3	4		
4								1

7.

		2	1	5			3	
5	8				7		1	
		1				5		2
	5			3				6
8			5	9	1			4
3				7			8	
6		3				4		
	1		9				6	3
	7			8	3	2		

8.

	1		9		3	8		
			4		2	1	6	
			1	5	8	2		
2	5	9				4		
	7			8			9	
		4				6	7	5
		7	3	4	5			
	6	8	7		1			
		5	8		6		3	

Respuestas:

1.

9	2	6	8	4	3	5	7	1
8	7	3	5	6	1	9	2	4
4	5	1	9	7	2	8	3	6
3	4	7	1	9	8	6	5	2
1	8	2	7	5	6	3	4	9
5	6	9	3	2	4	1	8	7
2	9	4	6	8	5	7	1	3
6	1	8	2	3	7	4	9	5
7	3	5	4	1	9	2	6	8

2.

8	4	1	2	3	5	9	6	7
5	9	7	4	1	6	8	2	3
6	3	2	8	7	9	4	1	5
3	8	5	1	4	2	7	9	6
4	1	9	3	6	7	5	8	2
2	7	6	9	5	8	1	3	4
1	6	3	5	9	4	2	7	8
9	2	4	7	8	3	6	5	1
7	5	8	6	2	1	3	4	9

3.

5	2	9	6	1	8	7	3	4
3	4	8	2	7	9	6	5	1
1	7	6	5	4	3	2	9	8
8	5	3	7	6	4	1	2	9
7	9	4	3	2	1	5	8	6
2	6	1	9	8	5	4	7	3
9	8	7	4	5	6	3	1	2
6	1	2	8	3	7	9	4	5
4	3	5	1	9	2	8	6	7

4.

3	7	8	4	2	5	9	6	1
4	1	9	7	6	8	5	3	2
6	2	5	3	1	9	8	4	7
7	3	6	9	4	1	2	8	5
9	5	2	6	8	3	7	1	4
1	8	4	2	5	7	6	9	3
8	4	1	5	9	2	3	7	6
2	6	7	8	3	4	1	5	9
5	9	3	1	7	6	4	2	8

5.

3	1	6	7	2	4	8	9	5
8	5	7	3	9	6	1	4	2
9	4	2	1	8	5	7	3	6
4	6	8	2	7	1	9	5	3
1	3	5	4	6	9	2	8	7
7	2	9	8	5	3	6	1	4
2	7	3	9	4	8	5	6	1
5	9	4	6	1	7	3	2	8
6	8	1	5	3	2	4	7	9

6.

7	2	3	8	9	4	1	5	6
1	4	9	2	6	5	8	7	3
8	6	5	1	3	7	2	9	4
9	7	4	6	5	2	3	1	8
2	5	8	3	4	1	9	6	7
6	3	1	9	7	8	5	4	2
3	8	7	4	1	9	6	2	5
5	1	6	7	2	3	4	8	9
4	9	2	5	8	6	7	3	1

7.

9	6	2	1	5	4	8	3	7
5	8	4	3	2	7	6	1	9
7	3	1	8	6	9	5	4	2
1	5	7	4	3	8	9	2	6
8	2	6	5	9	1	3	7	4
3	4	9	2	7	6	1	8	5
6	9	3	7	1	2	4	5	8
2	1	8	9	4	5	7	6	3
4	7	5	6	8	3	2	9	1

8.

4	1	2	9	6	3	8	5	7
5	8	3	4	7	2	1	6	9
7	9	6	1	5	8	2	4	3
2	5	9	6	3	7	4	1	8
6	7	1	5	8	4	3	9	2
8	3	4	2	1	9	6	7	5
1	2	7	3	4	5	9	8	6
3	6	8	7	9	1	5	2	4
9	4	5	8	2	6	7	3	1

Este libro se terminó de imprimir
en los talleres gráficos de Editorial San Marcos situados en
Av. Las Lomas 1600, Urb. Mangomarca, S.J.L. Lima, Perú
RUC 10090984344